Für Lehrerinnen und Lehrer

Mathe sicher können

Auszug
"B1 - Brüche und Prozente verstehen" aus:

Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen

Brüche, Prozente, Dezimalzahlen

Ermöglicht durch
Deutsche Telekom Stiftung

Cornelsen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

So funktioniert das Diagnose- und Förderkonzept

In den 16 Diagnose- und Förderbausteinen erarbeiten Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern wichtige Basiskompetenzen.

16 Basiskompetenzen gliedern die Bausteine und verbinden Diagnose und Förderung.

Standortbestimmung – Baustein B4 A

Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{\square}{\square}$ Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11}-\frac{4}{11}=\frac{\square}{\square}$ Rechnung:

Diagnose: Mit 2 bis 4 Aufgaben in der Standortbestimmung stellen Sie fest, was die Lernenden schon können.

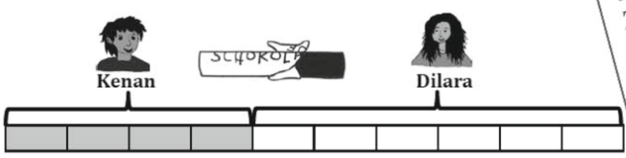
Die Standortbestimmungen befinden sich im hinteren Teil dieser Handreichungen als Kopiervorlage.

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
- Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel

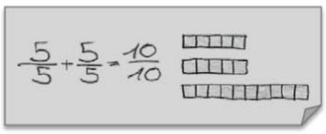
beschreiben?



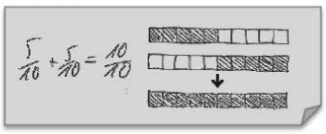
b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.

c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

Emily:

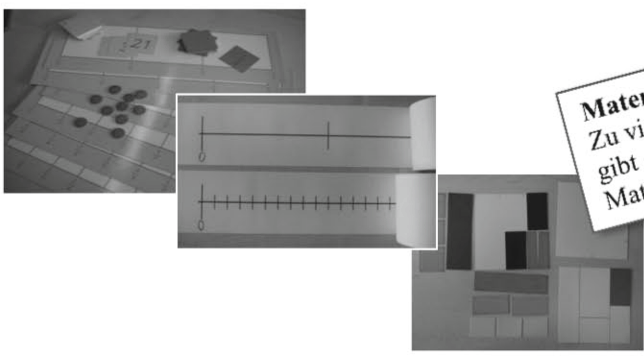


Maurice:



Förderung: Zu jeder Diagnoseaufgabe gibt es eine passende Fördereinheit, die differenziert und gemeinsam bearbeitet wird.

Die Fördereinheiten sind in einem eigenen Förderheft abgedruckt und in dieser Handreichung erläutert.



Material: Zu vielen Förderaufgaben gibt es Material, mit dem man Mathe besser verstehen kann.

Tipps zum Material sind in dieser Handreichung.
Viele Materialien befinden sich im zugehörigen Materialkoffer von Cornelsen Experimenta

Mathe sicher können

Handreichungen
für ein Diagnose- und Förderkonzept
zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen

Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

Entwickelt und Erprobt von
Stephan Hußmann
Birte Pöhler
Susanne Prediger
Andrea Schink
Lara Sprenger

Erarbeitet an der Technischen Universität Dortmund
im Rahmen von `Mathe sicher können´, einer Initiative der Deutsche Telekom Stiftung.

technische universität
dortmund

Deutsche
Telekom
Stiftung

Herausgeber: Susanne Prediger, Christoph Selter, Stephan Hußmann, Marcus Nührenbörger
Autorinnen und Autoren: Stephan Hußmann, Birte Pöhler, Susanne Prediger, Andrea Schink, Lara Sprenger

Redaktion: Corinna Mosandl, Birte Pöhler, Lara Sprenger
Illustration der Figuren: Andrea Schink
Alle sonstigen Bildrechte für Illustrationen und technische Figuren liegen bei den Herausgebern.

Umschlaggestaltung: Corinna Babylon

Unter der folgenden Adresse befinden sich multimediale Zusatzangebote:
www.mathe-sicher-koennen.de/Material

1. Auflage, 1. Druck 2014

Druck: DBM Druckhaus Berlin-Mitte GmbH

ISBN 978-3-06-006536-3

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.
www.pefc.de

Dieses Dokument enhält folgenden Auszug:

Inhaltsverzeichnis der Handreichungen Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

B1 A Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen – Didaktischer Hintergrund

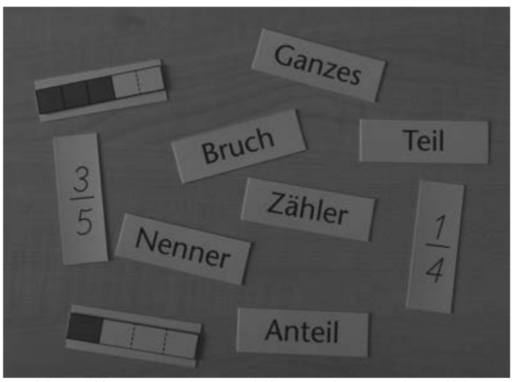
Lerninhalt

Mit den Brüchen begegnet Lernenden zwar einiges Vertrautes, viele Eigenschaften der natürlichen Zahlen gelten jedoch plötzlich nicht mehr. Der verständnisorientierten (Wieder-)Erarbeitung anschaulicher Bruchvorstellungen, welche die Basis der gesamten Bruchrechnung bilden, kommt daher eine zentrale Bedeutung zu.

Der *Anteil von einem Ganzen* ist eine zentrale Grundvorstellung: Der Bruch bezieht sich dabei auf *ein* (zusammenhängendes) Ganzes (z.B. Kuchen oder Pizza).

Zusammenhänge zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen verstehen

Um tragfähige inhaltliche Vorstellungen aufzubauen, sollten alle Lernenden verstehen, dass Anteile immer in Bezug zu einem Ganzen und einem Teil interpretiert werden müssen. Dabei kommt es auf die Relation des Teils zum Ganzen an. Diese Zusammenhänge müssen systematisch und operativ erarbeitet und verinnerlicht werden.



Fachbegriffe zu Brüchen und ihre Bedeutung im Bild

Manche Lernende haben zunächst Schwierigkeiten mit dem Begriff *Anteil*. Wichtig ist, dass sie den Bruch inhaltlich als Anteil verstehen, d.h. ihn auf ein Ganzes bezogen deuten können. Andere aktivieren auch Verhältnisvorstellungen von Brüchen (1 Stück wird markiert und 3 nicht, also 1/3), die in diesem Kontext nicht tragfähig sind.

Interpretationen des „Anteils von einem Ganzen" für Stamm- und Nicht-Stammbrüche

Für Stammbrüche (d.h. Brüche mit Zähler 1) gibt es zwei miteinander verbundene Interpretationen:

- *Interpretation 1:* Ein Bruch kann in einer Verteilungssituation gedeutet werden. Der Zähler steht dann für das Ganze, das verteilt wird; der Nenner für die Anzahl der Personen, die sich das Ganze gerecht (d.h. jeder bekommt gleich viel) teilen. Der Bruch gibt den Anteil an, den *eine* Person von diesem Ganzen bekommt.
- *Interpretation 2:* Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Stücke das Ganze zerlegt wird. Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke im relevanten Teil davon an – er *zählt* also.

Beide Interpretationen sind in Fördereinheit 1 möglich. Die erstgenannte ist durch ihren Kontextbezug intuitiv zugänglich, kann jedoch beim Übergang zu Nicht-Stammbrüchen (d.h. Brüchen mit Zählern ungleich 1) gerade schwächeren Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten, da in diesem Fall von mehreren Ganzen ausgegangen wird (2/3 bedeutet „3 Leute teilen sich 2 Pizzen"). Deshalb wird sie in Fördereinheit 2 nicht aufgegriffen. Stattdessen werden Nicht-Stammbrüche gemäß Interpretation 2 gedeutet.

Veranschaulichung und Material

Flächige ikonische Darstellungsmittel

Das hier genutzte zentrale Darstellungsmittel ist die Rechteckdarstellung. Zwar ist auch der Kreis für das Ganze eine prominente und gut lebensweltlich anknüpfbare Darstellung („Pizza"), jedoch hat er im Gegensatz zur Rechteckdarstellung nur eine begrenzte Reichweite bei der Erarbeitung weiterführender Konzepte (z.B. Addition / Multiplikation von Brüchen). Lebensweltlich lässt sich das Rechteck als „Blechkuchen" deuten.

Ergänzt werden Rechtecke z.T. durch weitere Formen, um eine Flexibilisierung der Vorstellungen anzuregen. Bruchstreifen als spezielle flächige Darstellungen werden ebenfalls genutzt, da sie für das Erweitern und Ordnen (Bausteine **B2 A**, **B2 B**, **B3 B**) eine wichtige Rolle spielen.

Auf Kästchenpapier wird weitgehend verzichtet: Der Fokus liegt weniger auf der exakten Darstellung der Anteile durch die Lernenden, als auf dem konzeptuellen Verstehen der Zusammenhänge.

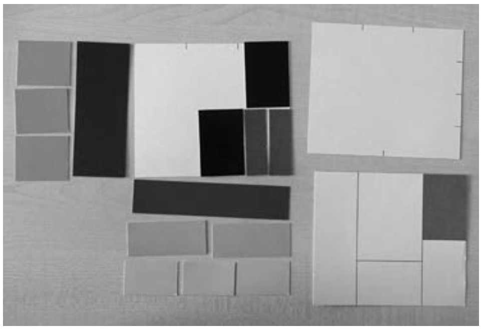
Flächige haptische Anschauungsmittel

Neben den rein ikonischen Darstellungsmitteln kommen auch Papier zum Falten von Anteilen sowie Bruchpuzzles zum Einsatz, um einen stärker handlungsorientierten Zugang zu Brüchen zu ermöglichen:

Anteile zeichnen und falten

Durch das Falten von Papier können Lernende haptisch erfahren, dass der Anteil umso kleiner wird, je größer der Nenner (bzw. in je mehr Stücke das Ganze zerlegt) ist.

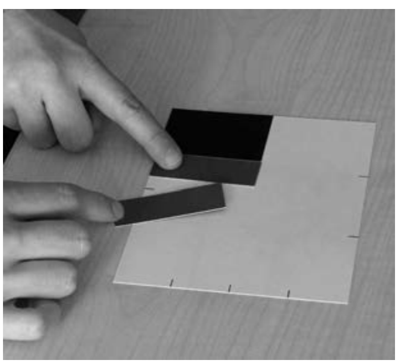
Bruchpuzzles ermöglichen es, verschiedene Anteile nachzulegen und zu vergleichen: „1/9 vom Ganzen passt dreimal in das Drittel“ ist dabei eine mögliche Einsicht, die Lernende intuitiv am Material machen können. Darüber hinaus ermöglicht das Bruchpuzzle, zu enge Vorstellungen aufzubrechen: Manche Schülerinnen und Schüler verstehen z.B. 1/7 nur als „1 von 7 Stücken“. Sind weniger als sieben Stücke markiert (wie in der weißen Fläche rechts unten im Bild), so stehen sie vor der Schwierigkeit, das graue Stück als 1/7 zu deuten. Durch das Auslegen der Fläche mit Puzzleteilen können Strategien entwickelt werden, Anteile richtig zu deuten.



Das Bruchpuzzle und seine Struktur

Aufbau der Förderung

Die Kompetenz beginnt in **Fördereinheit 1 (Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen)** mit der Erarbeitung des Anteils von einem Ganzen mit Stammbrüchen. Dabei wird der Anteil inhaltlich in *Kuchen-Verteilungs-Situationen* gedeutet und der Zusammenhang von Nenner und Größe des Teils bzw. Anteils erarbeitet:



Anteile über Auslegen von Flächen bestimmen

Sowohl durch das Falten von Papier, als auch über operative Bilderfolgen wird die Auswirkung der Veränderung des Nenners bei gleichbleibendem Zähler und Ganzen auf den Teil und den Anteil untersucht. Im weiteren Verlauf werden die Vorstellungen zum Anteil und dem Zusammenhang zwischen ihm, dem Teil und dem Ganzen durch Variationen des Ganzen erweitert sowie die Begrifflichkeiten erarbeitet.

Eine weitere Systematisierung betrifft das Aufbrechen der zunächst im Verteilungskontext genutzten Vorstellung, dass der Nenner angibt, in wie viele Stücke das Ganze zerlegt wurde: Diese Vorstellung wird durch das Nutzen eines Bruchpuzzles zu der Einsicht erweitert, dass der Nenner zwar etwas mit der Zerlegung des Ganzen zu tun haben kann, doch bei ungleichmäßiger Zerlegung nicht haben muss (z.B. „1/4 bleibt 1/4 vom Ganzen, auch wenn der Rest nur aus einem Stück besteht.“).

Fördereinheit 2 (Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen) zur Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen hat einen zu Fördereinheit 1 analogen Aufbau und knüpft an die Erfahrungen aus dieser an. Hier wird zunächst die Rolle des Zählers (bei gleichbleibendem Nenner und Ganzen) erarbeitet, bevor dann ebenfalls Aufgaben zur Systematisierung und zum Üben folgen.

Anzahl Kuchen und Kinder:	Bild Das bekommt ein Kind:	Anteil für ein Kind:
1 Kuchen für 2 Kinder		$\frac{1}{2}$
1 Kuchen für 4 Kinder		$\frac{1}{4}$
1 Kuchen für 6 Kinder		$\frac{1}{6}$
1 Kuchen für 8 Kinder		$\frac{1}{8}$

So viele Stücke hat der ganze Riegel:	Diesen Teil, also so viele gleich große Stücke, bekommt Tim:	Bild. Das bekommt Tim:	Tims Anteil vom Schokoriegel:
5	1		$\frac{1}{5}$
5	2		$\frac{2}{5}$
5	3		$\frac{3}{5}$
5	4		$\frac{4}{5}$
5	5		$\frac{5}{5}$
6	4		$\frac{4}{6}$

Operatives Erarbeiten der Bedeutung von Zähler und Nenner

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 27 - 46.

Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. Manuskript. Online. Aachen. http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf

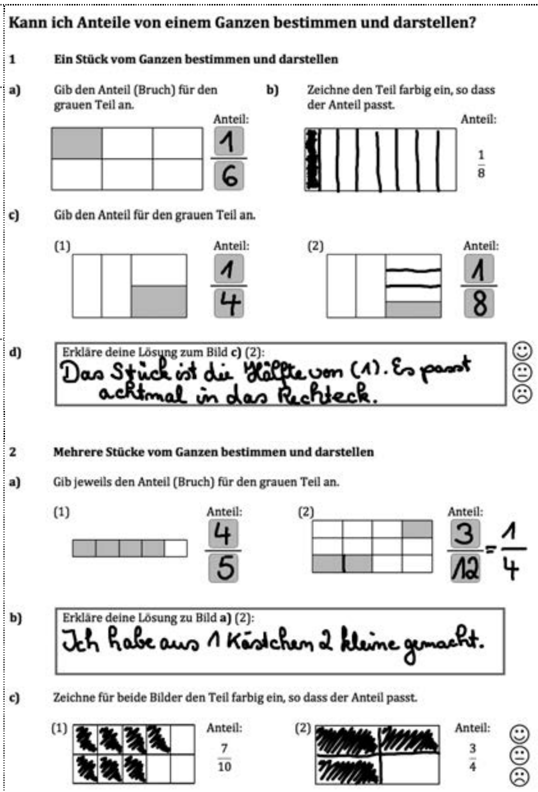
B1 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Manche Lernende haben Hemmungen, ihr Vorgehen schriftlich zu beschreiben (vor allem 1 d) und 2 b)). Oft hilft es schon sie zu motivieren, ihre Ideen so aufzuschreiben, wie sie sie denken.
Um Vorstellungen nicht zu verfälschen, ist es sinnvoll, keine Formulierungsvorschläge zu machen.

Wenn Lernende in 1 c) irritiert sind, weil sie in beiden Bildern den Anteil 1/4 ablesen („Da kommt beide Male derselbe Anteil raus, aber das Bild sieht anders aus?“), auffordern, ihre Schwierigkeiten mit der Aufgabe zu notieren.


Kann ich Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen?

1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an. Anteil: $\frac{1}{6}$

b) Zeichne den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. Anteil: $\frac{1}{8}$

c) Gib den Anteil für den grauen Teil an. (1) Anteil: $\frac{1}{4}$ (2) Anteil: $\frac{1}{8}$

d) Erkläre deine Lösung zum Bild c) (2): Das Stück ist die Hälfte von (1). Es passt achtmal in das Rechteck.

2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

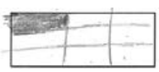
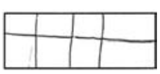
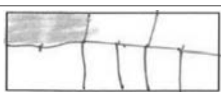
a) Gib jeweils den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an. (1) Anteil: $\frac{4}{5}$ (2) Anteil: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) Erkläre deine Lösung zu Bild a) (2): Ich habe aus 1 Kästchen 2 kleine gemacht.

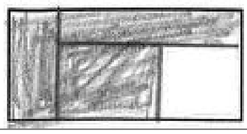
c) Zeichne für beide Bilder den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. (1) Anteil: $\frac{7}{10}$ (2) Anteil: $\frac{3}{4}$

Hinweise zur Auswertung:

Diagnoseaufgabe 1: Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a), b), c.1)	$\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$ / $\frac{1}{3}, \frac{3}{1}$ 	Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben.	(Wieder-)Erarbeitung der Anteilsvorstellung in 1.1 - 1.4, danach weitere Aufgaben zur Systematisierung, insbesondere 1.5. Bei b) Zeichenungenauigkeiten berücksichtigen.
b)		8 Felder ohne Markierung: Flüchtigkeitsfehler oder problematische Gleichsetzung mit „geachteltem Ganzen“.	
b), c), d)	 Erklärung zu Bild (3): weill da 4 Stück sind aber es wurde 1 angemalt. $\frac{1}{4}$	Größe der Stücke wird nicht beachtet.	
c.2)	z.B. $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$	Vermutlich richtige Idee, dass es auf Größe der Stücke ankommt. Schwierigkeiten beim Abschätzen.	Mündlich nachfragen. Ggf. üben mit 1.6.
c.2), d)	keine Angabe	Anteil kann bei *schwierigerer* Aufteilung nicht abgelesen werden. Irritation wegen c) (1).	Überprüfen, ob Schwierigkeit in der Strukturierung des Ganzen liegt, dann 1.6 bearbeiten.

Diagnoseaufgabe 2: Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a.1), a.2)	$\frac{1}{4}, \frac{4}{1}$ $\frac{3}{9}, \frac{9}{3}$	Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben (z.T. bei Nichtberücksichtigung der Größe der Stücke).	Ggf. (Wieder-)Erarbeitung der Anteilsvorstellung in 1.1 - 1.4, danach weitere Aufgaben zur Systematisierung, insbesondere 1.5 sowie 2.1 - 2.4 zur Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen.
a.2), c.2)	$\frac{2}{11}$ 	Nichtberücksichtigung der Größe der Stücke.	Ggf. Flexibilisierung des Zusammenhangs von Teil und Ganzem in 1.6. Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen (2.1 - 2.4). Danach Systematisierung und Flexibilisierung des Zusammenhangs von Teil und Ganzem auch bei Nicht-Stammbrüchen (2.5; 2.6). Zeichenungenauigkeiten berücksichtigen.
b)	z.B. „Ich kann das nicht rechnen, weil 2 Kästchen zusammen sind.“	Schwierigkeiten, mit unterschiedlicher Größe der Stücke umzugehen.	

1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

1.1 Erarbeiten (30 - 40 Minuten)

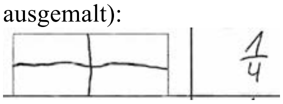
Ziel: Stammbrüche im Kontext des gerechten Verteilens eines Ganzen bestimmen und darstellen

Material: Ggf. Papier zum Falten der Anteile

Umsetzung: a) UG, dann EA; b) UG

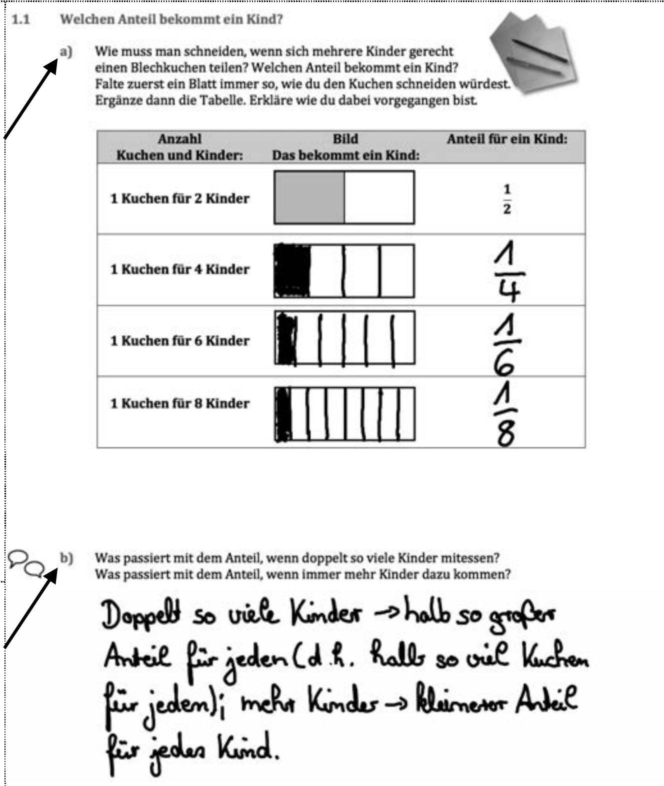
Zu beachten: *Gerecht* klären: Jeder bekommt gleich viel. Operative Veränderung (siehe b)) gut sichtbar bei horizontaler Einteilung der Streifen. Andere Aufteilungen nutzen, um Teile / Anteile zu derselben Situation zu vergleichen. Zeichenungenauigkeiten ansprechen (Impuls: Ich würde mir dieses (größtes der jeweils gezeichneten Stücke) Stück aussuchen), aber Verständnis unterordnen.

Hintergrund: Anteile falten = Handlungsorientierung
Typische Schwierigkeit: Lernende markieren nicht den Teil, sondern nur Zerteilung (d.h. für 1/4 werden 4 Stücke eingezeichnet, aber keines wird markiert / ausgemalt):



Impuls: Ich sehe 0/4, 0/6 etc. – wird in 1.5 aufgegriffen.

Typische Schwierigkeit: Manche Lernende argumentieren: „Je größer der Nenner, desto größer der Anteil."
Zu beachten: Größe des Anteils mit Kuchenmenge pro Kind verknüpfen: Mehr Kinder, weniger Kuchen, also kleinerer Anteil.



1.1 Welchen Anteil bekommt ein Kind?

a) Wie muss man schneiden, wenn sich mehrere Kinder gerecht einen Blechkuchen teilen? Welchen Anteil bekommt ein Kind? Falte zuerst ein Blatt immer so, wie du den Kuchen schneiden würdest. Ergänze dann die Tabelle. Erkläre wie du dabei vorgegangen bist.

Anzahl Kuchen und Kinder:	Bild Das bekommt ein Kind:	Anteil für ein Kind:
1 Kuchen für 2 Kinder		$\frac{1}{2}$
1 Kuchen für 4 Kinder		$\frac{1}{4}$
1 Kuchen für 6 Kinder		$\frac{1}{6}$
1 Kuchen für 8 Kinder		$\frac{1}{8}$

b) Was passiert mit dem Anteil, wenn doppelt so viele Kinder mitessen? Was passiert mit dem Anteil, wenn immer mehr Kinder dazu kommen?

Doppelt so viele Kinder -> halb so großer Anteil für jeden (d.h. halb so viel Kuchen für jeden); mehr Kinder -> kleinerer Anteil für jedes Kind.

1.2 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

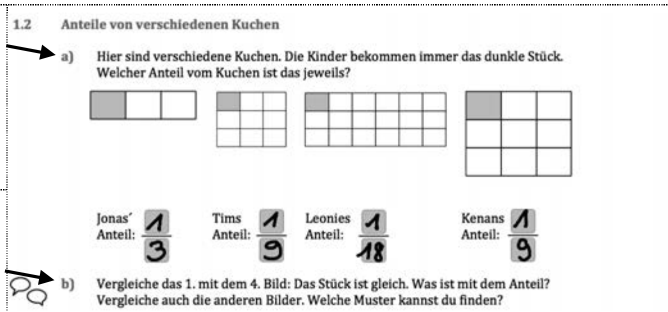
Ziel: Stammbrüche ablesen; Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem erkennen und beschreiben

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) UG

Zu beachten: Werden Zähler und Nenner nicht tragfähig gedeutet, zunächst zu 1.3 wechseln und Fachbegriffe klären, an 1.1 anbinden. Bei Schwierigkeiten Lernende auffordern, alles zu beschreiben, was sie entdecken, ggf. steuern durch Bilderauswahl.

Lösung: Entdeckbare Muster: 1 nach 4: Teil gleich, Ganzes größer, Anteil kleiner (Quantifizierung nicht notwendig). 2 nach 3: Teil gleich, Ganzes größer, Anteil kleiner. 2 nach 4: anderer Teil, anderes Ganzes, aber dennoch gleicher Anteil.



1.2 Anteile von verschiedenen Kuchen

a) Hier sind verschiedene Kuchen. Die Kinder bekommen immer das dunkle Stück. Welcher Anteil vom Kuchen ist das jeweils?

Jonas' Anteil: $\frac{1}{3}$ Tims Anteil: $\frac{1}{9}$ Leonies Anteil: $\frac{1}{18}$ Kenans Anteil: $\frac{1}{9}$

b) Vergleiche das 1. mit dem 4. Bild: Das Stück ist gleich. Was ist mit dem Anteil? Vergleiche auch die anderen Bilder. Welche Muster kannst du finden?

1.3 **Erarbeiten (5 - 10 Minuten)**

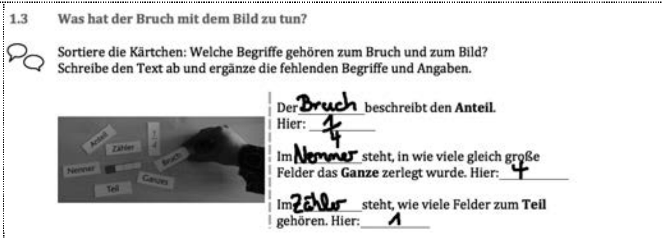
Ziel: Fachbegriffe und ihre konzeptuelle Bedeutung erarbeiten

Material: MB: Bruchbegriffe

Umsetzung: EA, dann GA

Zu beachten: Beherrschung von Fachbegriffen ist zentral: Kärtchen später immer wieder aufgreifen. *Anteil* ist schwieriger Begriff, da er Beziehung zwischen Teil und Ganzem herstellt. Er sollte auch an die Deutung im Kuchenkontext angebunden werden (1.1).

Weitere Aufgabe: Bei Zuordnungsschwierigkeiten können auch weitere Stammbruch-Anteile zur Verdeutlichung betrachtet werden.



1.4 **Üben (20 - 30 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Stammbrüche bestimmen und darstellen;
Operativ Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil, Ganzem durcharbeiten

Material: -

Umsetzung: a), b), c) jeweils EA, dann UG; d) UG; e) Aufgabengenerator (PA)

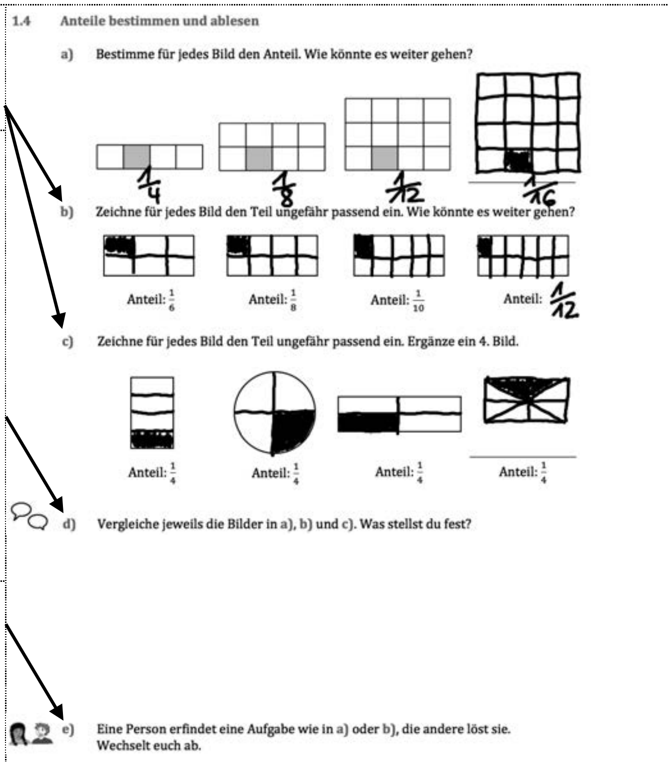
Zu beachten: Zeichenungenauigkeiten ansprechen (Ich würde mir dieses Stück aussuchen.), aber dem Verständnis unterordnen.

Zu beachten: Beschreibung der Muster ist hier wichtiger als exakte Fortführung. Werden Muster nicht erkannt, Aspekte ansprechen: Was passiert mit dem Ganzen? etc. Verschiedene Bilder der Lernenden vergleichen.

Lösung: Operatives Muster in a): Ganzes wird größer, Teil bleibt gleich, d.h. Anteil wird kleiner.
Operatives Muster in b): Ganzes bleibt gleich, Anteil wird kleiner, d.h. Teil wird kleiner. (Zu beachten: Wird ein anderer Anteil ergänzt, dieses Muster thematisieren lassen.)
Operatives Muster in c): Gleicher Anteil kann bei unterschiedlichen Ganzen anders aussehen.

Zu beachten: Qualität des Prozesses sicherstellen, wenn Lernende sich oder andere überfordern. Falls keine Ideen, Muster aus anderen Teilaufgaben aufgreifen.

Reflexion: Bei eigenen Bildern eventuelle „ungerechte“ Verteilungen als Lernchance nutzen und diskutieren.



1.5 **Erarbeiten (5 - 10 Minuten)**

Ziel: Stammbruch in Bild und Situation deuten; Fehlvorstellungen zu Stammbrüchen thematisieren

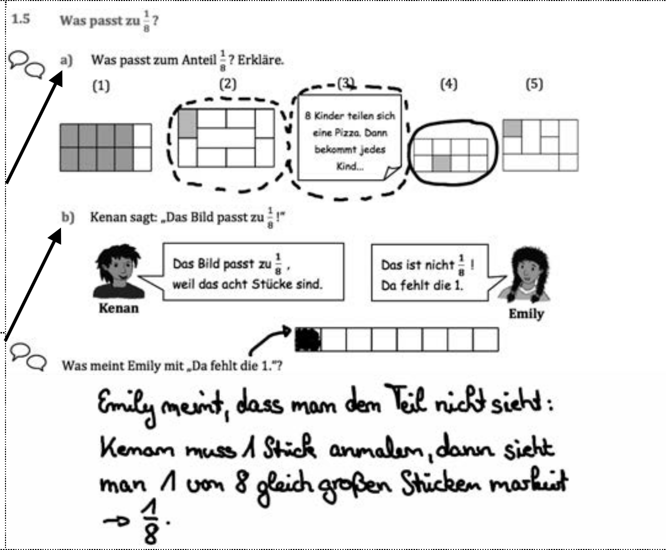
Material: -

Umsetzung: a) EA, dann PA, dann UG; b) PA, dann UG

Lösung: 1/8 passt zu (2), wenn Inneres nicht mitgezählt wird. Lernende miteinander aushandeln lassen, auf welches Ganze sie gucken. (3) Mit Hinweis auf gerechtes Teilen. (4) Ohne Einschränkung.
Zu beachten: Lernende auch erläutern lassen, warum die anderen Bilder nicht passen. Bei Schwierigkeiten mit (1) auf 1.1 und 1.3 zurückgreifen. Lernende, die (5) als richtig deuten („Weil da 8 Stücke sind und eines markiert ist."), finden Systematisierung und Abgrenzung in 1.7.

Impuls: Was hat sich Kenan wohl gedacht? Wie würdest du ihm erklären, warum seine Lösung noch nicht stimmt?

Hilfestellung: Falls keine Ideen geäußert werden: „Ich sehe da 0/8" als Impuls.



1.6 **Erarbeiten (20 - 30 Minuten)**

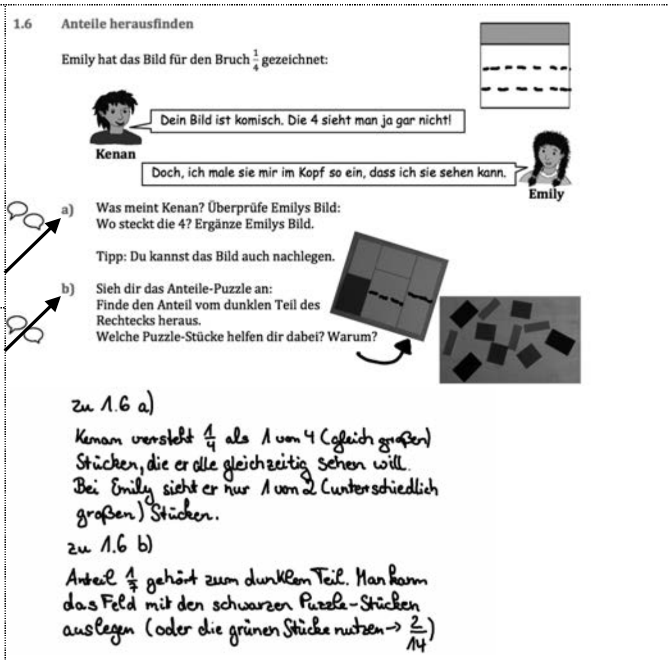
Ziel: Anteile als Beziehung zwischen Teil und Ganzem deuten;
Verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt;
Komplexere Anteile im Bild bestimmen lernen

Material: MB: Bruchpuzzle, Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Hintergrund: Bruchpuzzle hilft, die fehlende Einteilung des Ganzen und damit den Anteil 1/4 doch zu sehen: Das ganze Rechteck kann mit gleich großen Puzzleteilen ausgelegt werden.
Beispiel im Kuchenkontext hilft zu verstehen, dass die Einteilung vom Rest nicht relevant ist: Wenn du 1/4 von einem Kuchen bekommen sollst, dann ist es für dich egal, ob der Rest 1, 2, 3 oder noch mehr Stücke hat.

Zu beachten: Lernende können auch erst Vermutungen anstellen. Schwächeren Lernenden kann der Anteil wie in a) *verraten* werden, um Vertrauen in Strategie und Ergebnis zu gewinnen. Manche Lernende bekommen je nach Puzzlemethode verschiedene Anteile als Ergebnis heraus – das sollte zu einem kognitiven Konflikt führen.
Weitere Aufgabe: Intuitiver Größenvergleich der Puzzleteile: grün ist 1/2 von schwarz. Wie viele Stücke braucht man mehr, um das Ganze damit auszulegen? → 7 (Man braucht doppelt so viele Stücke.)



2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

2.1 **Erarbeiten (10 - 15 Minuten)**

Ziel: Nicht-Stammbrüche operativ erarbeiten; Fachbegriffe und ihre Bedeutung erarbeiten

Material: MB: Bruchbegriffe

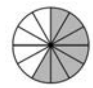
Umsetzung: a) UG; b) EA; c) UG

Lösung: Weißer Teil 5/12, dunkler Teil 7/12

2.1 Einen größeren Teil vom Ganzen bekommen

a) Emily hat großen Hunger:
Sie nimmt sich direkt mehrere Stücke vom Kuchen.

Welchen Anteil vom Kuchen hat sie gegessen?



Hintergrund: Schokoriegel dient als außermathematischer Vorstellungsanker für die, für Lernende u.U. ungewohntere, Darstellung von Anteilen in Bruchstreifen, die später erneut aufgegriffen wird. Aufgabe bereitet operativ Erfahrung vor, dass der Zähler die Anzahl der Stücke *zählt* (siehe c)).

Typische Schwierigkeit: Lernende, die Fördereinheit 1 nicht bearbeitet haben, deuten Anteile möglicherweise als „Zähler steht für die Anzahl der Kuchen, die verteilt werden und Nenner steht für die Anzahl der Kinder, die ihn sich teilen.“ (*Interpretation 1* unter *Lerninhalt*). Sie deuten hier „1 Schokoriegel wird an 5 Kinder verteilt. Welchen Anteil bekommt jedes Kind?“. Dann 1.3 bearbeiten, um hier genutzte *Interpretation 2* zu erarbeiten.

Zu beachten: Bruchstreifen im letzten Bild hat 6 Stücke, dies kann leicht übersehen werden.

b) Welchen Anteil vom Schokoriegel bekommt Tim?

Ergänze die Tabelle.

So viele Stücke hat der **ganze Riegel:**	**Diesen Teil,** also so viele gleich große Stücke, **bekommt Tim:**	**Bild. Das bekommt Tim:**	**Tims Anteil vom Schokoriegel:**
5	1		$\frac{1}{5}$
5	2		$\frac{2}{5}$
5	3		$\frac{3}{5}$
5	4		$\frac{4}{5}$
5	5		$\frac{5}{5}$
6	4		$\frac{4}{6}$

Methode: Begriffe aus 1.3 für 3/5 (d.h. Nicht-Stammbruch) mithilfe der Karten thematisieren. Ggf. 1.3 wiederholend bearbeiten.

Lösung: Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Stücke man den Schokoriegel schneidet – hier 5. Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke an, die man bekommt – hier 3. Die Bezeichnung passt, weil der Zähler die Stücke *zählt*.

c) Erkläre den Anteil $\frac{3}{5}$ mit dem Schokoriegel.
Warum passt die Bezeichnung „Zähler“?

3 ← Zähler
5 ← Nenner

2.2 **Üben (5 - 10 Minuten)**

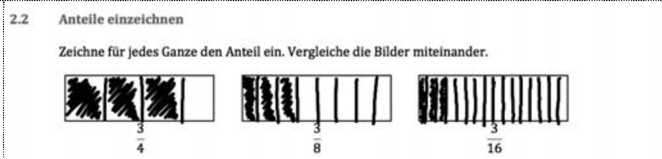
Ziel: Nicht-Stammbrüche darstellen und Muster erkennen können

Material: -

Umsetzung: EA, dann UG

Impuls: Zeichenungenauigkeiten ansprechen, aber Verständnis unterordnen.

Lösung: An den Brüchen und Bildern zu sehen: Ganzes bleibt gleich, Zähler bleibt gleich, Nenner wird größer (nämlich immer doppelt so groß), d.h. Anteil wird kleiner, Teil wird kleiner, es sind immer 3 Stücke markiert.



2.3 - 2.4 **Üben (20 - 35 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

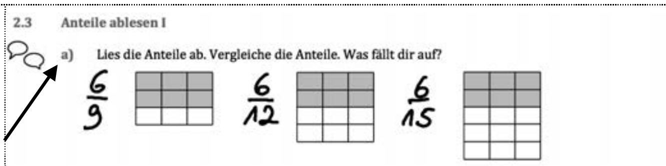
Ziel: Anteile ablesen; Muster erkennen und weiterführen;
Erkennen, dass der gleiche Anteil unterschiedlich aussehen kann

Material: -

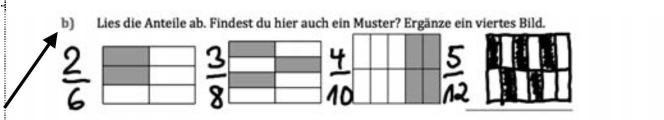
Umsetzung: 2.3 a), b) jeweils EA, dann UG; c) Aufgabengenerator (PA); 2.4 jeweils EA, dann PA

Hilfestellung: Lernende erst auffordern, alles zu beschreiben, was sie erkennen, dann Impuls: Was verändert sich vom 1. zum 2. / vom 2. zum 3. Bild?

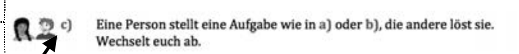
Lösung: Operatives Muster: Ganzes wird größer, Teil bleibt gleich, Anteil wird kleiner.



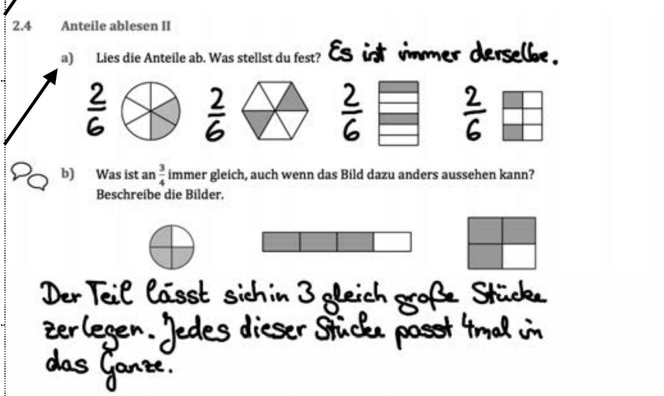
Lösung: Operatives Muster: Zähler wird immer um 1 größer, Nenner wird um 2 größer, Anteil wird größer, doch wenn das Ganze unterschiedlich ist, kann man auch über den Teil nichts sagen.



Zu beachten: Qualität des Prozesses sicherstellen, wenn Lernende sich oder andere überfordern. Falls keine Ideen, Muster aus anderen Teilaufgaben aufgreifen.



Impuls: Warum sind die Anteile gleich, obwohl die Bilder so unterschiedlich aussehen? → Die Ganzen sind zwar unterschiedlich groß, aber sind alle in 6 gleich große Stücke eingeteilt und zwei davon sind gefärbt, also immer 2/6.

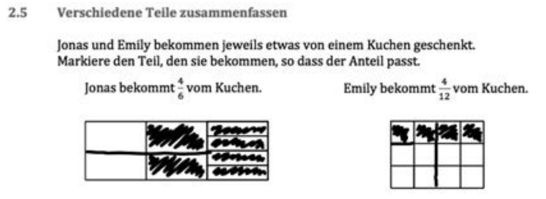


Weitere Aufgabe: Ggf. Bild ergänzen, bei dem der Teil nicht selbst unterteilt ist (Anknüpfend an 1.6 und vorbereitend für 2.6).

2.5	**Erarbeiten (5 - 10 Minuten)**
Ziel:	Bedeutung der Größe der Stücke erfassen
Material:	-
Umsetzung:	EA, dann UG

Impuls: Wie hast du die Aufgabe gelöst? Sind auch andere Einteilungen möglich?

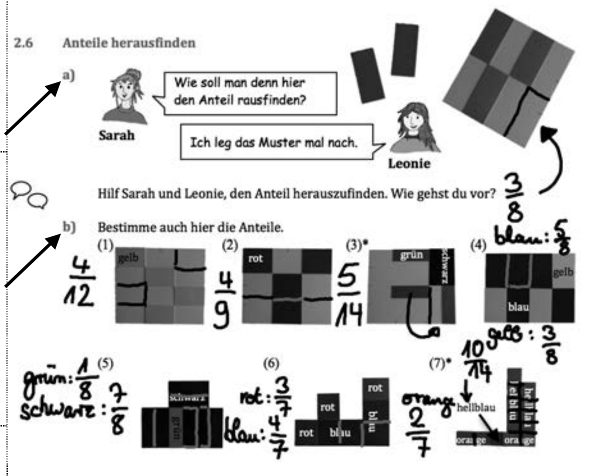
Zu beachten: Bei Schwierigkeiten Aufgabe 2.6 vorziehen. Alternative Strukturierungen thematisieren. Fragen, ob für den Anteil auch zwei große und zwei kleine Stücke markiert werden können.



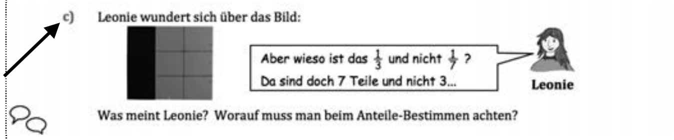
2.6	**Erarbeiten (20 - 30 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**
Ziel:	Anteile als Beziehung zwischen Teil und Ganzem deuten; Verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt; Komplexere Anteile in Bildern bestimmen lernen
Material:	MB: Bruchpuzzle, Folienstifte
Umsetzung:	a), b) jeweils EA, dann UG; c) UG; d) Aufgabengenerator (PA)

Hilfestellung: Bedeutung von Nenner und Zähler thematisieren (siehe 2.1), dann für Strategien auf 1.6 zurückgreifen. Auch nach alternativen Strukturierungen zum Erkennen des Anteils fragen.

Zu beachten: Mit dem Puzzle kann man alle Bilder nachlegen. Die Bilder (4) bis (7) werden ohne Grundfläche gelegt: Variation und Systematisierung der Strategie des geeigneten Strukturierens. Es können in (4) bis (7) Anteile für beide Puzzle-Stücke angegeben werden.
Impuls: Wie oft passt Stück X in Stück Y? Wie oft passt es dann in die Grundfläche / das Ganze?



Methode: Die Strukturierung wird mit Folienstiften auf die Puzzle-Grundfläche gezeichnet. Dabei helfen die Markierungen zur Orientierung. Die Lernenden versuchen durch Auslegen der Fläche, den Anteil zu bestimmen.
Zu beachten: Das Bild wird hier vergröbert betrachtet (d.h. Leonie sieht 1/3 und nicht 3/9). Ggf. als Hilfe Anteil 3/9 zusätzlich zu 1/3 thematisieren, systematisch wird Erweitern / Kürzen in **B2 A** / **B2 B** erarbeitet.



Methode: Eigene Aufgaben können sowohl mit der Puzzle-Grundfläche als auch ohne diese gelegt werden. Die Puzzle-Grundfläche kann auch mit Folienstiften geeignet strukturiert werden.

B1 B Prozente bestimmen und darstellen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

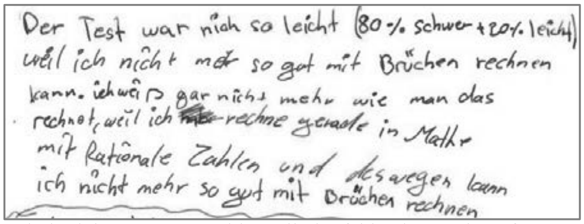
Prozente begegnen Lernenden als andere Schreibweise für Brüche überall – z.B. in der Werbung, beim Einkaufen oder in den Medien – und begleiten ihren Alltag. Trotz ihres hohen Anwendungsbezugs, ihrer Verankerung im Alltag sowie ihrer konzeptuellen Nähe zu Brüchen werden sie oft als völlig neuer Lernstoff empfunden, den die Lernenden nicht genügend mit bereits aufgebauten Bruchvorstellungen verknüpfen können.

Verknüpfung von Brüchen und Prozenten

Prozente sollten im Rahmen eines Curriculums zu Brüchen auf natürliche Art und Weise an eine bereits inhaltlich aufgebaute Anteilsvorstellung für Brüche (siehe Baustein **B1 A**) anknüpfen und keinesfalls als ein isolierter neuer Lerninhalt verstanden werden (siehe auch Schülerdokument zur ähnlichen Problematik der fehlenden Verknüpfung von Lerninhalten): Sie stellen kein gänzlich neues inhaltliches Konzept, sondern nur eine andere *Schreibweise für spezielle Brüche* dar, nämlich für Brüche mit dem einheitlichen Nenner 100. In dieser kurzen Einheit stehen zunächst nur der Teil und das Ganze im Vordergrund, durch die Anteile als Prozente erklärt werden. Diese Begrifflichkeiten stehen zur Darstellung der Verknüpfung von Brüchen und Prozenten auch weiterhin im Vordergrund, erst anschließend können die hier genutzten Begriffe Teil, Anteil und Ganzes (siehe Baustein **B1 A**) durch die in der Prozentrechnung üblichen Begriffe *Prozentwert*, *Prozentsatz* und *Grundwert* ersetzt werden. An der graphischen Darstellung anhand von Streifen wird die enge Verknüpfung zwischen Brüchen und Prozenten erlebt und Sicherheit im Wechsel zwischen den zwei symbolischen Schreibweisen in beide Richtungen für einfache Zahlenbeispiele (wie 40 % oder 3/10) erlangt.

Prozente in der Von-Hundert-Vorstellung

Die als Erstzugriff für die (Wieder-)Erarbeitung fokussierte Vorstellung für Prozente ist daher die *Von-Hundert-Vorstellung*, die auf der ursprünglichen Wortbedeutung des %-Zeichens im Sinne von *pro Hundert* basiert und sich organisch an die Interpretation von Brüchen als Anteile von einem Ganzen anbinden lässt: Es wird von einer aus 100 Einheiten bestehenden Grundmenge als Ganzes ausgegangen, wobei p % den Anteil von p dieser Einheiten an der Grundmenge (100 Einheiten) beschreibt (vgl. Hafner 2012, S. 37). Die Erarbeitung erfolgt im Kontext *Fortschrittsbalken am PC*, der an Alltagserfahrungen der Lernenden anknüpft.


Der Test war nich so leicht (80 % schwer + 20 % leicht) weil ich nicht ~~mer~~ so gut mit Brüchen rechnen kann. ich weiß gar nichts mehr wie man das rechnet, weil ich ~~mei~~ rechne gerade in Mathe mit Rationale Zahlen und deswegen kann ich nicht mehr so gut mit Brüchen rechnen

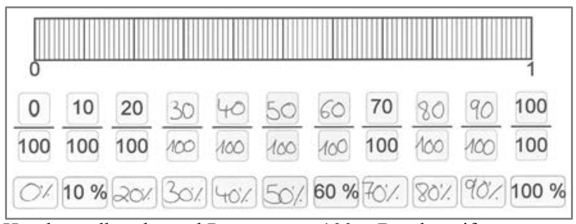
Schülerdokument zur Problematik der fehlenden Verknüpfung von Lerninhalten

Die für viele Anwendungen wichtige, jedoch schwierigere Vorstellung, bei der Prozente relativ auf beliebige Grundwerte (z.B. 25 €) bezogen werden, wird hier nur für Brüche (Baustein **B1 C**) erarbeitet und kann erst im Anschluss auf Prozente erweitert werden.

Veranschaulichung und Material

Notations- und Sprechweise

Die Lernenden müssen dazu befähigt werden, flexibel zwischen der Notationsweise für Prozente und Anteile wechseln zu können. Notwendige Voraussetzung dafür ist ein inhaltlich tragfähiges Verständnis von Brüchen als Anteile: Lernende sollten nicht nur formal in beide Richtungen zwischen Brüchen und Prozenten umwandeln können (z.B. „Bei Brüchen mit Nenner 100 lasse ich einfach den Nenner weg und schreibe dafür ein %“), sondern sie sollten diese Entsprechung von Hundertstelbrüchen und Prozenten auch inhaltlich motiviert und materialgestützt erklären können („Das ist dasselbe, weil beide denselben Anteil (d.h. gleich große Teile) im Streifen beschreiben.“).

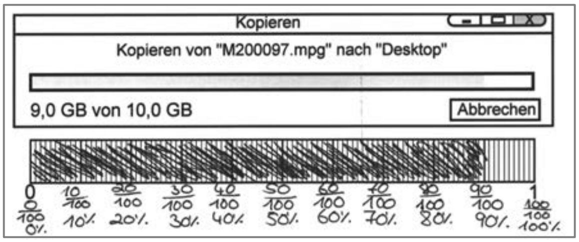


Hundertstelbrüche und Prozente am 100er-Bruchstreifen

Die wichtige Erkenntnis, dass einer Prozentzahl verschiedene gleichwertige Brüche zugeordnet werden können, aber ein Bruch immer eine Darstellung als Prozentzahl hat, wird in dieser Einheit nur intuitiv durch Zehntel- und Hundertstel-Brüche angebahnt (siehe 1.6 und 1.7) und erst in Baustein **B2 C** nach vielfältigen Erfahrungen zur Gleichwertigkeit von Brüchen systematisch vertieft.

Fortschrittsbalken und Bruchstreifen

Die inhaltliche Verknüpfung von Brüchen und Prozenten wird durch das Darstellungsmittel des Streifens gestützt:

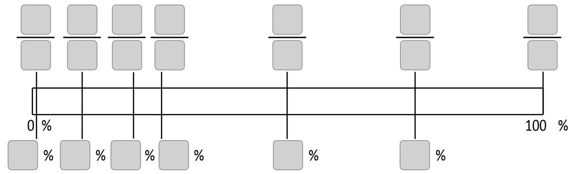


Übertragen des Ladebalkenfortschritts auf Streifendarstellung

Das zentrale Anschauungsmittel der Bruchstreifen kommt intuitiv auch in Baustein **B1 A** vor und wird ebenfalls in weiterführenden Kompetenzen systematisch genutzt. Prozente werden sowohl aus Streifen abgelesen, als auch mit ihnen dargestellt.

Als Einstieg werden alltagsbasierte bildliche Darstellungen in Form von Fortschrittsbalken am Computer gewählt, die vielen Jugendlichen aus der Alltagswelt vertraut sind. Diese intuitive Vorerfahrung wird aufgegriffen und für Schätzungen zu Anteilen sowie Prozenten genutzt. So gibt der fortlaufende Streifen an, wie weit der Computer mit seiner Aufgabe, die durch den gesamten Balken symbolisiert wird, vorangeschritten ist. Der gesamte Streifen stellt dabei das Ganze (etwa die Gesamtarbeitszeit oder -datenmenge) dar. Zuweilen werden weitere Informationen zum Status ergänzt, z.B. zur bereits kopierten und zur noch zu kopierenden Datenmenge oder aber zur noch verbleibenden Zeit bis zur Beendigung des laufenden Prozesses. Ein Prozess, dessen Ladebalken schon weiter ist, hat den größeren Anteil seines Auftrags geschafft.

Diese alltagsbasierten Darstellungen werden in die abstraktere Darstellung von Anteilen in Bruchstreifen überführt. Dabei werden im ersten Zugriff im Übergang übersichtliche und leicht zugängliche Streifen wie der 4er-Streifen gewählt, die schließlich von komplexeren 10er- bzw. 100er-Streifen abgelöst werden, in denen Anteile als Prozente interpretiert werden. Der 100er-Streifen vereint die 10er- und die 100er-Struktur durch hervorgehobene 10er-Anteile, sodass eine enge Verbindung der 10er- und 100er-Brüche mit Prozenten möglich wird. Die Streifendarstellung wird später in Baustein **B2 C** ausgebaut zur Doppelskala und in Baustein **DB** zum Zahlenstrahl.



Streifen mit Doppelskala

Aufbau der Förderung

Die Kompetenz besteht aus einer einzigen **Fördereinheit (Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen)**: Nach einem qualitativen und lebensweltlich angebundenen Einstieg über Fortschrittsbalken beim Computer, wird zunächst zu einfachen Bruchstreifen übergegangen: Es werden operativ Anteile zunächst im 4er-Streifen durchgearbeitet, um die Beziehung zwischen der Länge des Fortschrittbalkens und dem markierten Teil im Bruchstreifen zu erarbeiten. Im nächsten Schritt werden – immer noch angebunden an die lebensweltlichen Fortschrittsbalken – Anteile im 10er-Streifen identifiziert, bevor dann zum komplexen 100er-Streifen übergegangen wird.

Anteile im Hunderterstreifen übertragen

Der umgekehrte Darstellungswechsel von symbolischer Darstellung zum Bruchstreifen, erste intuitive Erfahrungen zur Gleichwertigkeit von 10er- und 100er-Brüchen und damit Prozenten sowie die intuitive Überprüfung und Bearbeitung von Fehlvorstellungen (z.B. 4/10 = 4 %) an Bruchstreifen, runden diese Fördereinheit ab.

Weiterführende Literatur

Baireuther, P. (1983): Die Grundvorstellungen der Prozentrechnung. In: Mathematische Unterrichtspraxis 4(2), 25 - 34.

Hafner, T. (2012): Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen. Berlin: Vieweg + Teubner, 37 - 42.

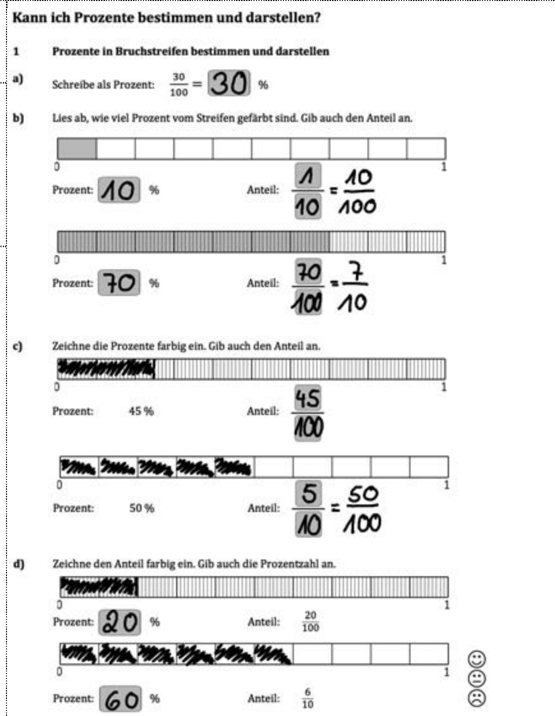
B1 B – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 15 - 20 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Lernende kann irritieren, dass sie zu einem Streifen zwei Zahlwerte angeben müssen. Hier darauf hinweisen, dass sie denselben Anteil nur unterschiedlich aufschreiben sollen.

45 % ist verhältnismäßig schwerer im 100er-Streifen einzuzeichnen – Lernende können sich hier schnell verzählen.


Kann ich Prozente bestimmen und darstellen?

1 **Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen**

a) Schreibe als Prozent: $\frac{30}{100}$ = 30 %

b) Lies ab, wie viel Prozent vom Streifen gefärbt sind. Gib auch den Anteil an.

0 1
Prozent: 10 % Anteil: $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$

0 1
Prozent: 70 % Anteil: $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

c) Zeichne die Prozente farbig ein. Gib auch den Anteil an.

0 1
Prozent: 45 % Anteil: $\frac{45}{100}$

0 1
Prozent: 50 % Anteil: $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$

d) Zeichne den Anteil farbig ein. Gib auch die Prozentzahl an.

0 1
Prozent: 20 % Anteil: $\frac{20}{100}$

0 1
Prozent: 60 % Anteil: $\frac{6}{10}$

Hinweise zur Auswertung:

Diagnoseaufgabe 1: Dezimalzahlen am Zahlenstrahl

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)	30/100 = 3 %	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel.	Prozente als Anteile in der *Von-Hundert-Vorstellung* erarbeiten (1.1 - 1.4). Zusammenhang von Zehntel- und Hundertstelbrüchen in Streifen herstellen (1.7). Bei größeren Problemen mit den Stellenwerten auf Förderung **D1 A** zurückgreifen.
b.1), b.2)	1 % bzw. 7 % und / oder Anteil: $\frac{1}{100}$ bzw. $\frac{7}{100}$	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel. Probleme beim Darstellungswechsel (Bild → Symbol).	
	90 % bzw. 30 % und/oder Anteil: $\frac{9}{10}, \frac{90}{100}$ bzw. $\frac{3}{10}, \frac{30}{100}$	Angabe des nicht gefärbten Anteils.	Kein Förderbedarf. Aufgabenstellung wurde uminterpretiert zur Betrachtung des Rests.
c.1), c.2)	Es wurden bei (1) 4 Teile gefärbt	Ungenaues Zeichnen oder Probleme beim Verknüpfen nicht „glatter Zähler“ mit dem 100er-Bruchstreifen (randständigeres Phänomen).	100er-Bruchstreifen erarbeiten und Darstellungswechsel üben (1.3 - 1.5). 1.6 zum intuitiven Verknüpfen von Prozenten und Zehntelbrüchen.
	Keine Markierung auf dem Bruchstreifen (2)	Schwierigkeiten beim Verknüpfen von Prozenten und dem 10er-Bruchstreifen.	Zehntel- und Hundertstelbrüche intuitiv verknüpfen (1.6).
	$\frac{45}{10}$ bzw. $\frac{50}{10}$	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel. Probleme beim Darstellungswechsel (Symbol → Symbol).	Prozente als Anteile in der *Von-Hundert-Vorstellung* erarbeiten (1.1 - 1.4). Zusammenhang von Zehntel- und Hundertstelbrüchen in Streifen herstellen (1.7). Darstellungswechsel üben (1.5).
d.1), d.2)	2 % bzw. 6 %	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel. Schwierigkeiten beim Wechsel der Darstellungsart (Symbol → Symbol).	

1 Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen

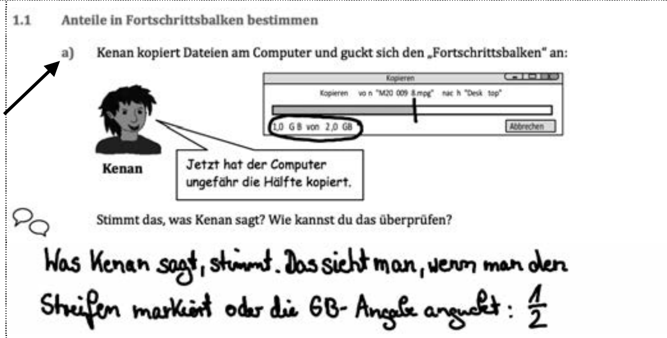
1.1 Erarbeiten (20 - 30 Minuten)

Ziel: Bruchstreifen als verallgemeinerte Fortschrittsbalken kennen lernen; Anteile in Bruchstreifen übertragen und ablesen

Material: KV: Ggf. größere Kopie der Streifen in c)

Umsetzung: a) PA, dann UG; b), c), d) jeweils EA, dann UG

Hintergrund: Strategien zum Überprüfen können das qualitative Unterteilen des Fortschrittsbalkens sein oder das Nutzen der Angaben in GB (letzteres erfordert allerdings eine komplexere Anteilsvorstellung).



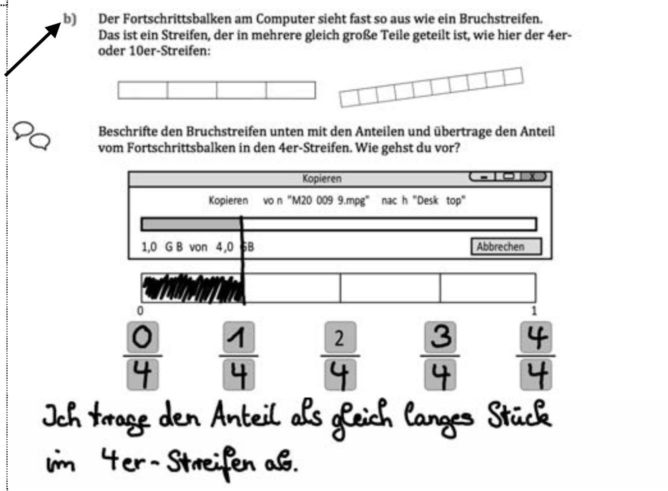
Hintergrund: Mit den Bruchstreifen kann an Aufgabe 2.1 in **B1 A** angeknüpft werden. Bei Erstzugriff hier die Bruchstreifen mit dem Fortschrittsbalken und den 4er-Bruchstreifen mit dem 10er-Bruchstreifen vergleichen lassen.

Zu beachten: Wichtig ist in diesem Kontext, dass die Streifen gleich lang sind.

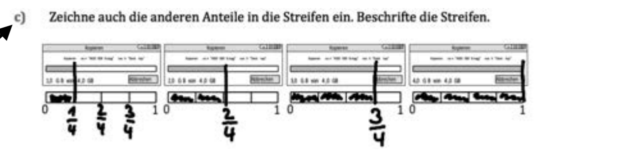
Impuls: Wie kann so ein Bruchstreifen helfen, um den Anteil herauszufinden?

Typische Schwierigkeit: Angabe der Brüche 0/4 und 4/4.

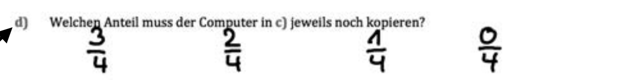
Impuls: Hier explizit die Rolle des Zählers ansprechen und die Anteile, d.h. die Viertel, operativ *durchzählen* (ggf. nach Bearbeitung von c)): 1/4, 2/4, 3/4. Was kommt danach? Was kommt davor?



Typische Schwierigkeit: Interpretation der Anteilsmarkierung: Die Anteile können sowohl als Flächen (wie in **B1 A**) bzw. Strecken als auch als Positionsmarkierungen (auf dem Zahlenstrahl) interpretiert werden. Dabei ist die erste Interpretation diejenige, die an die Anteilsvorstellung anknüpft und hier fokussiert werden sollte, die zweite aber ein späteres Lernziel in **DB**.



Zu beachten: Der Rest wird als Anteil zum Üben thematisiert.



1.2	**Erarbeiten (3 - 5 Minuten)**
Ziel:	Anteile in den 10er-Streifen übertragen; vom Fortschrittsbalken zum 10er-Bruchstreifen abstrahieren
Material:	-
Umsetzung:	EA, dann UG

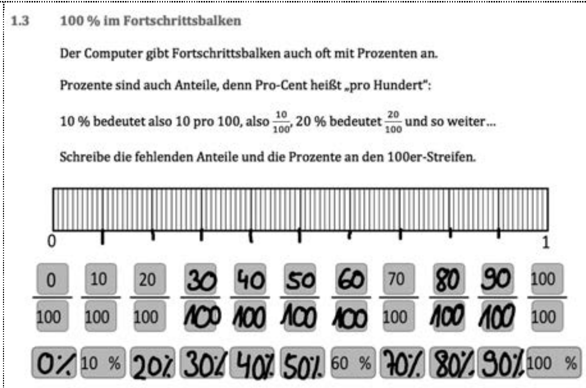
Hintergrund: Weitere Ablösung vom Fortschrittsbalken (Kontext) zum (10er-)Bruchstreifen (mathematisches Darstellungsmittel).

Zu beachten: 0/10 und 10/10 bereiten unter Umständen Schwierigkeiten (siehe 1.1).
Sicherstellen, dass auch auf die Frage nach dem Rest eingegangen wird.

1.3	**Erarbeiten (3 - 5 Minuten)**
Ziel:	Zusammenhang von Prozent und Hundertstelbrüchen auch ohne Kontextunterstützung
Material:	-
Umsetzung:	UG, dann EA und UG

Reflexion: Bedeutung von weiteren vorgegebenen Anteilen wie 70/100 und Prozenten wie 60 % klären lassen, um Basis für die Bearbeitung der fehlenden Anteile und Prozente zu schaffen.

Impuls: Was haben Zähler und Nenner mit den Bruchstreifen zu tun? Wie kann man diese dort ablesen?



1.4 Üben (10 - 15 Minuten)

Ziel: Darstellungswechsel vom Bild zur symbolischen Schreibweise vornehmen; Hundertstelbruch-Schreibweise, Zehntelbruch-Schreibweise und Prozentschreibweise nutzen

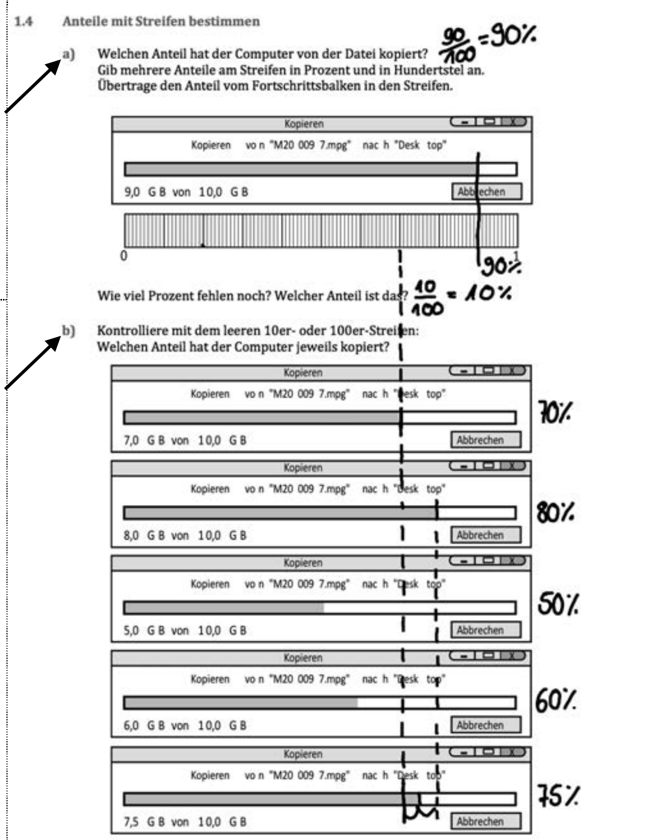
Material: KV: Mehrere 10er- und 100er-Bruchstreifen zum Übertragen der Anteile (ggf. laminiert)

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Methode: Fortschrittsbalken mit dem 100er-Bruchstreifen verknüpfen. Dabei darauf achten, dass sowohl Hundertstelbrüche als auch Prozente notiert werden.

Zu beachten: Auch den Rest als Bruch und Prozent schreiben lassen.

Hintergrund: Die GB-Angabe kann die Bestimmung des Anteils unterstützen und direkt in die Zehntelbruch-Schreibweise überführt werden. Eine Umwandlung in Hundertstelbrüche durch Erweitern ist in dieser Kompetenz noch nicht Lernziel, sondern erst in **B2 C.** Hier werden Anteile nur qualitativ bestimmt.
Zu beachten: Das Übertragen und Ablesen der Anteile kann – vor allem im 100er-Bruchstreifen – mit Ungenauigkeiten behaftet sein, da das genaue Ablesen visuell z.T. schwer fällt. Hier kommt es vor allem auf eine qualitativ tragfähige Lösung der Aufgabe an. Falls im 100er-Bruchstreifen nicht die den GB-Angaben entsprechenden exakten Anteile abgelesen werden (was bei der feinen Einteilung des Streifens nicht einfach ist), sollte dies nicht problematisiert werden.


1.4 Anteile mit Streifen bestimmen

a) Welchen Anteil hat der Computer von der Datei kopiert? $\frac{90}{100}$ = 90%
Gib mehrere Anteile am Streifen in Prozent und in Hundertstel an.
Übertrage den Anteil vom Fortschrittsbalken in den Streifen.

Kopieren
Kopieren von "M20 009 7.mpg" nach "Desk top"
9,0 GB von 10,0 GB
Abbrechen

0 1
90%

Wie viel Prozent fehlen noch? Welcher Anteil ist das? $\frac{10}{100}$ = 10%

b) Kontrolliere mit dem leeren 10er- oder 100er-Streifen:
Welchen Anteil hat der Computer jeweils kopiert?

Kopieren von "M20 009 7.mpg" nach "Desk top" – 7,0 GB von 10,0 GB – Abbrechen – 70%
Kopieren von "M20 009 7.mpg" nach "Desk top" – 8,0 GB von 10,0 GB – Abbrechen – 80%
Kopieren von "M20 009 7.mpg" nach "Desk top" – 5,0 GB von 10,0 GB – Abbrechen – 50%
Kopieren von "M20 009 7.mpg" nach "Desk top" – 6,0 GB von 10,0 GB – Abbrechen – 60%
Kopieren von "M20 009 7.mpg" nach "Desk top" – 7,5 GB von 10,0 GB – Abbrechen – 75%

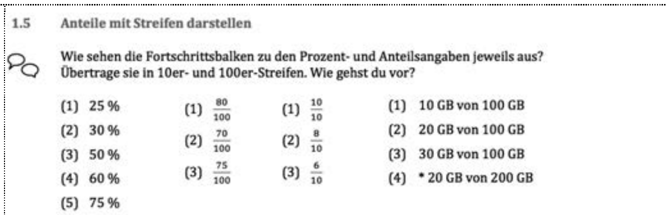
1.5 Üben (10 - 15 Minuten)

Ziel: Darstellungswechsel vom Anteil zum Bild vornehmen; zum Bruchstreifen abstrahieren

Material: KV: Mehrere 10er- und 100er-Bruchstreifen zum Übertragen der Anteile (ggf. laminiert)

Umsetzung: EA oder PA, dann UG

Hintergrund: Direkter Übergang zum Bruchstreifen (Darstellungswechsel vom Symbol zum Bild).
Typische Schwierigkeit: Verschiedene Schreibweisen (Prozent, Hundertstel- und Zehntelbrüche) können Lernenden Schwierigkeiten bereiten – insbesondere die 4. Spalte.
Hilfestellung: Warum passt der 100er-Streifen gut zu den GB?
Zu beachten: Viele Anteile lassen sich direkt in den 100er- bzw. 10er-Bruchstreifen übertragen. Bei (4) in der letzten Spalte ggf. darauf hinweisen, dass Bezugsgröße von 100 GB auf 200 GB wechselt.


1.5 Anteile mit Streifen darstellen

Wie sehen die Fortschrittsbalken zu den Prozent- und Anteilsangaben jeweils aus?
Übertrage sie in 10er- und 100er-Streifen. Wie gehst du vor?

(1) 25 %	(1) $\frac{80}{100}$	(1) $\frac{10}{10}$	(1) 10 GB von 100 GB
(2) 30 %	(2) $\frac{70}{100}$	(2) $\frac{8}{10}$	(2) 20 GB von 100 GB
(3) 50 %	(3) $\frac{75}{100}$	(3) $\frac{6}{10}$	(3) 30 GB von 100 GB
(4) 60 %			(4) * 20 GB von 200 GB
(5) 75 %			

1.6 **Erarbeiten (5 - 10 Minuten)**

Ziel: Zusammenhang von Prozent, Zehntel- und Hundertstelbrüchen in Bruchstreifen ohne Kontext unter implizitem Ausnutzen von Gleichwertigkeit herstellen

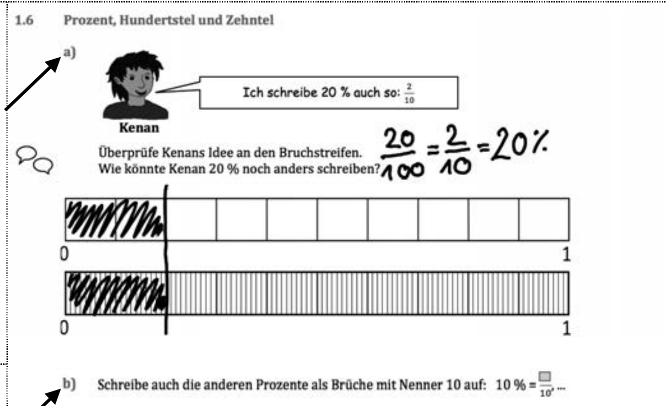
Material: KV: Ggf. mehrere 10er- und 100er-Bruchstreifen zum Übertragen der Anteile (ggf. laminiert)

Umsetzung: PA, dann UG

Hintergrund: Verknüpfung der Prozentschreibweise mit Zehntelbrüchen.

Zu beachten: Nicht das Umwandeln steht im Fokus, sondern ein intuitives Verständnis anhand von gefärbten Anteilen in Bruchstreifen. Gleichwertigkeit wird dabei implizit genutzt und nur über gleich lange Streifen thematisiert.

Hilfestellung: Die anderen Prozente können ebenfalls in Streifen dargestellt werden, um sich von der Richtigkeit der Umwandlung zu überzeugen.



1.7 **Erarbeiten (10 - 15 Minuten)**

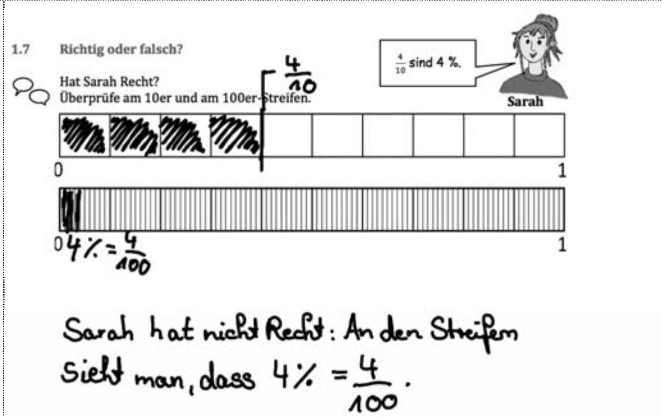
Ziel: Fehlvorstellungen thematisieren und widerlegen

Material: -

Umsetzung: EA, dann UG

Hintergrund: Sarahs Lösung ist nicht tragfähig. Sie soll hier intuitiv am Streifen über die nicht gleich langen Markierungen für die Anteile im 10er- und 100er-Bruchstreifen widerlegt werden.

Impuls: Wie sieht 4/10 im 100er-Streifen aus? Wie kann man den Anteil übertragen? Wo finde ich 4 %? Was bedeutet 4 %? In welchem Streifen kann man das gut darstellen?



B1 C Anteile von Mengen bestimmen und darstellen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

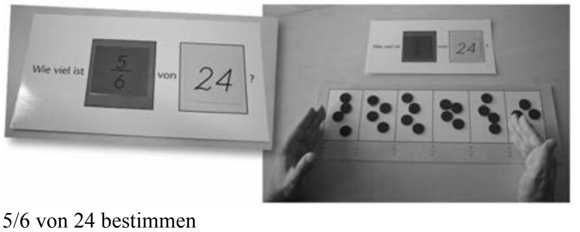
Im Gegensatz zum Anteil eines Ganzen (Baustein **B1 A**) ist das Ganze beim Bestimmen von relativen Anteilen von Mengen keine zusammenhängende Einheit (z.B. ein Rechteck), sondern besteht aus mehreren Objekten (z.B. Bonbons oder Plättchen).

Vorstellungen vom Ganzen erweitern

Für Lernende kann eine zentrale Schwierigkeit darin bestehen, das „unzusammenhängende Ganze“ wirklich als *ein Ganzes*, d.h. als *eine Einheit* zu begreifen: Im intuitiven Zugriff stellen z.B. 24 Bonbons keine Einheit dar: Jedes einzelne Bonbon ist vielmehr für sich gesehen *ein Ganzes*. Die Anforderung an Lernende besteht darin, von der Vorstellung des Ganzen als einer *festen* und *zusammenhängenden* Einheit, auf eine zusammengehörende Menge, die in sich aus unabhängigen Objekten besteht, zu abstrahieren. Dabei ist die Kenntnis des Anteils von einem Ganzen und der zugehörigen Begrifflichkeiten (Baustein **B1 A**) eine notwendige Voraussetzung.

Anteile als multiplikativen Bezug verstehen

Eine weitere Schwierigkeit, die mit der vorherigen zusammen hängt, kann der notwendige *multiplikative Bezug des Anteils auf das Ganze* darstellen: Während beim Anteil von einem Ganzen das Ganze nicht als Zahl, sondern als Bild gegeben ist bzw. vorgestellt werden kann, wird es beim Anteil von Mengen als Anzahl interpretiert. So wird es möglich, den Teil zu 5/6 von 24 Plättchen (oder Bonbons) zu bestimmen. Dabei stellt die zentrale Tätigkeit das Bilden und Umbilden von Einheiten dar:



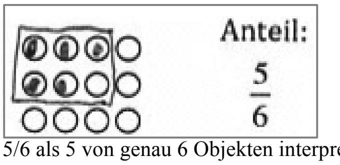
5/6 von 24 bestimmen

Das Ganze 24 wird wie in der Abbildung zunächst in sechs Teilgruppen des Ganzen mit jeweils vier Plättchen, d.h. in Einheiten zerlegt – die Sechstel. Diese werden dann im Anschluss als Einheiten quasikardinal genutzt, d.h. „durchgezählt“: „1/6 von 24“ bedeutet, dass man ein Sechstel nimmt, „5/6 von 24“ bedeutet, dass man fünf Sechstel nimmt. Das Ergebnis ist also $5 \cdot 4 = 20$ und kann dann auch wieder als Anzahl interpretiert werden. Zentral für die Interpretation des Anteils von Mengen ist also das Bilden und Umbilden von Einheiten – hier das Sechstel und die 5/6 als Vereinigung von fünf Sechsteln, die den gesuchten Teil angibt.

Wegen des multiplikativen Bezugs findet man in der didaktischen Literatur auch die Bezeichnung *relativer Anteil* als Verallgemeinerung des Anteils von Mengen.

Veranschaulichung und Material

Einigen Lernenden kann der notwendige Schritt des (Um-)Bildens von Einheiten Schwierigkeiten bereiten, wenn sie Anteile wie 5/6 nur als „5 von genau 6 Objekten“ interpretieren und keinen Bezug auf ein anderes Ganzes als den Nenner herstellen können, wie etwa bei „5/6 von 12“ (siehe Scan mit falscher Lösung in der Abbildung).



5/6 als 5 von genau 6 Objekten interpretiert

Diese Schwierigkeit kann dabei in verschiedenen Darstellungsformen auftreten – in symbolischer Notation „5/6 von 12“ aber auch in ikonischer Form, wenn 12 Objekte zeichnerisch gegeben sind und der Teil zu 5/6 davon markiert werden soll. So werden in der Förderung sowohl haptische Anschauungsmittel und ikonische Darstellungen als auch symbolische Repräsentationen erarbeitet, die miteinander in der Progression der Einheit verknüpft werden.

Plättchen in Bruchstreifen

Anteile von Mengen in Bruchstreifen bestimmen

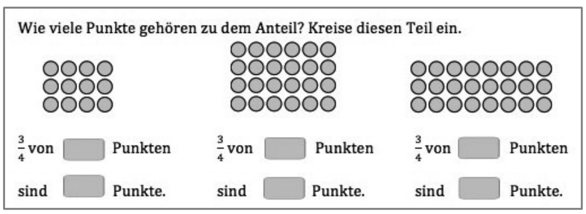
Zentrales haptisches Anschauungsmittel sind große Bruchstreifen (3er- bis 9er-Streifen), auf denen Plättchenmengen verteilt werden: Die Bruchstreifen knüpfen als zusammenhängende Ganze an die Streifendarstellungen aus den Bausteinen **B1 A** bzw. **B1 B** an.

Die vorgegebene (lineare) Strukturierung der Streifen unterstützt das Bilden und Umbilden bzw. Zusammenfassen von Teilmengen des Ganzen und schafft eine Verbindung des bekannten Anteils eines Ganzen mit dem zu erarbeitenden Anteil von Mengen, denn nach dem Verteilen der Plättchen auf dem Streifen kann man alle relevanten Strukturen gleichzeitig sehen: die ganze Menge (als Ganzes greifbar durch den untergelegten Streifen) und die Einheiten (als Teilmengen durch die Strukturierung des Streifens in Anteile). So kann operativ das Bilden und Umbilden von Einheiten am Material erarbeitet werden („Was ist 1/6, 2/6, 3/6, ... von 24?") und ein Gespür für den Zusammenhang von Teil, Anteil, Ganzem bzw. gesuchter Plättchenmenge, Einheiten, Bruchstreifen und gesamter Plättchenmenge entwickelt werden. 5/6 von 24 bestimmt man so z.B., indem man

- den 6er-Streifen auswählt und die 24 Plättchen auf diesem verteilt. 5 Felder mit je 4 Plättchen entsprechen dem gesuchten Teil, 20 (siehe Bild oben).
- durch 6 dividiert (24 : 6 = 4). Diesen Teil zu 1/6 multipliziert man mit 5 (5 · 4 = 20).

Ikonische Anschauungsmittel

Als weitere Anschauungsmittel dienen verschiedene (un-)strukturierte Punktebilder, in die Anteile eingezeichnet oder aus denen sie abgelesen werden müssen: Ein notwendiger Schritt auf dem Weg zur Beherrschung des Anteils von Mengen stellt die Loslösung von der konkreten Handlung des Verteilens von Plättchen auf dem Streifen dar. Punktebilder sind optisch noch recht nah an den zu verteilenden Plättchen auf dem Bruchstreifen. Unterschiede bestehen jedoch darin, dass Punktebilder nicht beliebig umgruppiert werden können und auch andere interne Strukturierungen als in Streifen (lineare Abfolge der Anteile im Bruchstreifen: 1/3, 2/3, 3/3) aufweisen können.



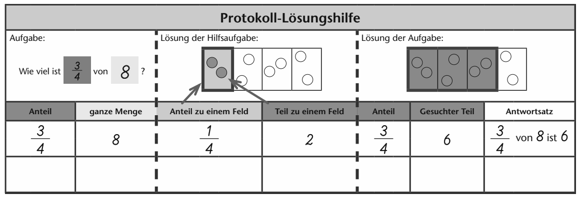
Anteile in Punktebildern bestimmen

Aufbau der Förderung

In **Fördereinheit 1 (Anteile von Mengen bestimmen)** wird mit der materialgestützten Erarbeitung des Anteils von Mengen durch das Bilden und Umbilden von Einheiten begonnen. Damit wird auf einer sehr konkreten Stufe der Vorstellungsbildung angesetzt: Es werden Objekte verteilt und nicht abstraktere Größen genutzt wie etwa „2/3 von 300 €".

Gerade schwächere Lernende benötigen diese konkrete Handlung am Material, um die einzelnen Operationen als Zwischenschritte zur Bestimmung des Anteils inhaltlich zu verstehen.

Die Materialhandlung und damit auch der Vorstellungsaufbau werden durch die Bereitstellung von sprachlichen Mitteln in Form eines Protokolls gestützt.



Bereitstellung sprachlicher Mittel im Protokoll

Darüber hinaus werden an das konkrete Material gebundene Vorstellungsübungen zur Reflexion und Verinnerlichung der Handlung angebahnt (Verteilen der Plättchen im Kopf vorstellen).

In einem weiteren Schritt werden die handlungsgestützten Anteilsbestimmungen auf statische Darstellungen übertragen (Punktebilder), die jedoch im Sinne des operativen Prinzips systematisch variiert werden, um die Vorstellungen von den Zusammenhängen zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen zu vertiefen.

In **Fördereinheit 2 (Anteile von Mengen berechnen)** wird der Schritt von materialgestützten bzw. ikonisch repräsentierten Anteilsbildungen hin zur symbolischen Darstellung und zum Kalkül vollzogen. Dabei wird an die Erfahrungen aus der vorangehenden Fördereinheit angeknüpft. Das konkrete Verteilen der Objekte wird mit dem Kalkül verglichen und verknüpft (s.o.). Der Erarbeitung des Rechenverfahrens folgt eine Phase des operativen und verständnisorientierten Übens.

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 27 - 46.

Prediger, S. / Krägeloh, N. / Wessel, L. (2013): Wieso 3/4 von 12, und wo ist der Kreis? Brüche für Teile von Mengen handlungs- und strukturorientiert erarbeiten. In: Praxis der Mathematik in der Schule 55(52), 9 - 14.

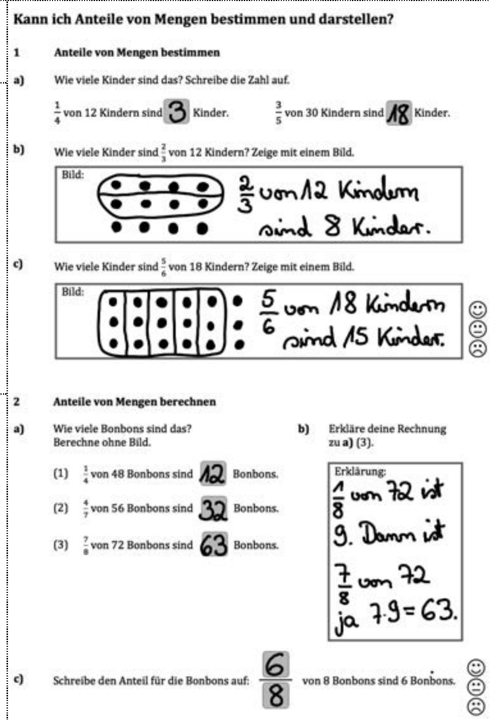
B1 C – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Manche Lernende zeichnen figurative Bilder mit realistischen Details, die für den mathematischen Kern nicht notwendig sind, oder können sich unter dem Arbeitsauftrag nichts vorstellen. Diese Lernenden darauf hinweisen, dass mit *Bild* (1 b) und c)) auch Punktebilder oder Ähnliches gemeint ist und dass es wesentlich ist, dass das Bild die Aufgabe (und nach Möglichkeit die Lösungsidee) gut zeigt.

2c) bereitet Lernenden z.T. Schwierigkeiten. Dann auf die analoge Formulierung in 2a) hinweisen bzw. konkret in der vertrauteren Formulierung nachfragen: Welcher Anteil ist denn 6 von 8 Bonbons?



Kann ich Anteile von Mengen bestimmen und darstellen?

1 Anteile von Mengen bestimmen

a) Wie viele Kinder sind das? Schreibe die Zahl auf.

$\frac{1}{4}$ von 12 Kindern sind 3 Kinder. $\frac{3}{5}$ von 30 Kindern sind 18 Kinder.

b) Wie viele Kinder sind $\frac{2}{3}$ von 12 Kindern? Zeige mit einem Bild.

Bild: $\frac{2}{3}$ von 12 Kindern sind 8 Kinder.

c) Wie viele Kinder sind $\frac{5}{6}$ von 18 Kindern? Zeige mit einem Bild.

Bild: $\frac{5}{6}$ von 18 Kindern sind 15 Kinder.

2 Anteile von Mengen berechnen

a) Wie viele Bonbons sind das? Berechne ohne Bild.

(1) $\frac{1}{4}$ von 48 Bonbons sind 12 Bonbons.

(2) $\frac{4}{7}$ von 56 Bonbons sind 32 Bonbons.

(3) $\frac{7}{8}$ von 72 Bonbons sind 63 Bonbons.

b) Erkläre deine Rechnung zu **a)** (3).

Erklärung: $\frac{1}{8}$ von 72 ist 9. Dann ist $\frac{7}{8}$ von 72 ja $7 \cdot 9 = 63$.

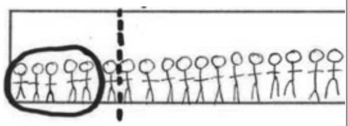
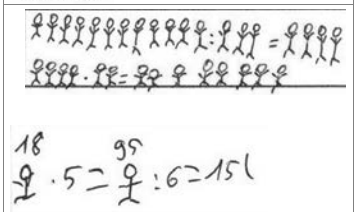
c) Schreibe den Anteil für die Bonbons auf: $\frac{6}{8}$ von 8 Bonbons sind 6 Bonbons.

Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1.a), 2.a), 2.b)	z.B. $\frac{1}{4}$ von 12 ist 4	I: Der Nenner wird als Teil interpretiert. oder II: Zähler und Nenner werden miteinander multipliziert: $1 \cdot 4 = 4$.	Grundlage: Das Bilden von Einheiten am Material erarbeiten (1.1). Die Rolle von Zähler und Nenner für das Bilden von Anteilen erarbeiten (1.2). Den Kalkül mit der Vorstellung verbinden (1.3 - 1.4). Aufbau: Wenn Fördereinheit 1 inhaltlich bewältigt ist, wird in Fördereinheit 2 der Kalkül auch für größere Zahlen erarbeitet, bei denen man nicht mehr gerne Bilder zeichnet. Darüber hinaus Vorstellungen flexibilisieren durch verschiedene Aufgabentypen und Darstellungswechsel (2.1 - 2.3).
	z.B. $\frac{3}{5}$ von 30 ist 6	Es wird der Teil zum Stammbruch angegeben, d.h. 1/5 von 30 berechnet. Die Schwierigkeit besteht darin, den Zähler in die Bestimmung des Teils einzubeziehen.	
	z.B. $\frac{3}{5}$ von 30 ist 15	I: Zähler und Nenner werden miteinander multipliziert: $3 \cdot 5 = 15$. oder II: Wie I, aber das Ergebnis, hier 15, wird noch von 30 abgezogen: $30 - 3 \cdot 5 = 15$. Der Anteil kann in beiden Fällen nicht multiplikativ auf das Ganze, hier 30, bezogen werden.	

Diagnoseaufgabe 1: Anteile von Mengen bestimmen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a.2)	10	Es wird vermutlich durch den Zähler geteilt: 30 : 3 = 10.	Das Bilden von Einheiten am Material erarbeiten (1.1). Die Rolle von Zähler und Nenner für das Bilden von Anteilen erarbeiten (1.2). Den Kalkül mit der Vorstellung verbinden (1.3 - 1.4).
b), c)		Es werden 2 von 3 bzw. 5 von 6 Kindern angemalt (die 3 bzw. 6 Kinder werden von den restlichen abgetrennt). Es besteht die Schwierigkeit, den Anteil auf eine größere Menge als die Zahl im Zähler zu beziehen.	
		Es wird nur der Nenner, 3 bzw. 6, markiert.	
		Die Aufgabe wird richtig berechnet. Die Zahlen werden durch ikonische Darstellungen der Kinder ersetzt, d.h. strukturelle Zusammenhänge können nicht bildlich dargestellt werden.	Zusammenhänge zwischen Zähler, Nenner, Teil, Anteil und Ganzem in Bildern erarbeiten (1.5 - 1.7).

Diagnoseaufgabe 2: Anteile von Mengen berechnen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
c)	2/8	I: Die Zahlen werden miteinander verrechnet. II: Das „von“ wird als „Minus“ interpretiert bzw. es wird der Anteil für den Rest angegeben: (8 - 6)/8	Grundlage: Das Bilden von Einheiten am Material erarbeiten (1.1). Die Rolle von Zähler und Nenner für das Bilden von Anteilen erarbeiten (1.2). Den Kalkül mit der Vorstellung verbinden (1.3 - 1.4). Aufbau: Wenn Fördereinheit 1 inhaltlich bewältigt ist, wird in Fördereinheit 2 der Kalkül auch für größere Zahlen erarbeitet, bei denen man nicht mehr gerne Bilder zeichnet. Darüber hinaus Vorstellungen flexibilisieren durch verschiedene Aufgabentypen und Darstellungswechsel (2.1 - 2.3).

1 Anteile von Mengen bestimmen

1.1 Erarbeiten (20 - 25 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Handlungsgestützt Anteile von Mengen bestimmen

Material: MB: Große Bruchstreifen, Plättchen, Mengen- und Anteilskarten, Aufgabentafel, Protokoll-Lösungshilfe; KV: Protokollbogen (mindestens 1 pro Person)

Umsetzung: a) PA oder GA; b) Aufgabengenerator (PA oder GA)

Methode: Vorbereitung: Die Bruchstreifen anordnen (vom 3er- zum 9er-Streifen). Mengenkarten den Streifen zuordnen und verdeckt neben die Streifen legen: Markierung auf der Rückseite beachten (A → 3er-Streifen, B → 4er-Streifen usw.). Anteilskarten verdeckt als Stapel auf den Tisch legen.
Wichtig ist, dass Lernende die Plättchen gleichmäßig auf dem Bruchstreifen verteilen. Lernende gehen hier unterschiedlich vor z.B.

- Sie verteilen die Plättchen einzeln „reihum".
- Sie führen im Kopf eine Division durch.

Lernende ihr Vorgehen beschreiben lassen.
Wichtig ist, genau deutlich zu machen, was zum Anteil gehört: Wo sieht man im Streifen 5/6?

Methode: Lernende können die Aufgaben beim Legen auf die Ablage laut sprechen. Beispielaufgabe gemeinsam konkret handelnd lösen. Dann zwei bis drei weitere Aufgaben lösen (ggf. zunächst ohne Ausfüllen des Protokolls).

Hintergrund: Protokoll dient zur Unterstützung der Handlung und ist sprachfördernd zur Einübung der strukturierenden Vokabeln Teil, Anteil, Ganzes. Durchsprechen, was die einzelnen Spalten bedeuten. Die Beispielaufgabe im Protokollkopf mit der konkreten Handlung am Bruchstreifen verknüpfen.

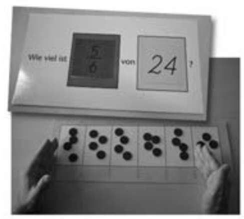
Zu beachten: Differenzierungspotenzial durch Hinzufügen oder Wegnehmen schwierigerer Mengenkarten. Protokoll-Lösungshilfe kann an die eigene Tabelle angelegt werden, um die Lösung der jeweiligen Aufgabe zu erarbeiten.

1.1 Anteile von Mengen mit Bruchstreifen bestimmen

Mit den Feldern des Bruchstreifens kann man Anteile von Mengen bestimmen:

Das liegt auf dem Tisch:
- Bruchstreifen
- grüne Anteilkarten
- gelbe Mengenkarten (pro Bruchstreifen ein Stapel)
- Plättchen
- eine Aufgabentafel
- ein Protokollbogen pro Person
- ein Protokoll-Lösungshilfe

So *legst* du eine Aufgabe:
1. Ziehe eine Anteilkarte, z.B. $\frac{5}{6}$.
2. Mit welchem Bruchstreifen kannst du den Anteil bestimmen?
3. Zieh eine Mengenkarte, zum Beispiel 24. Lege die Anteilkarte und die Mengenkarte auf die Felder der Aufgabentafel:
   Aufgabe: Wie viel ist $\frac{5}{6}$ von 24?



So *löst* du die Aufgabe:
1. Nimm die Plättchenmenge, die auf der Mengenkarte steht, also 24.
2. Zeige den Anteil mit der Plättchenmenge auf dem Bruchstreifen:
   Wie viele Plättchen gehören zu $\frac{5}{6}$?

a) Tim hat ein Protokoll angefangen. Damit löst er die Aufgabe „Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von 8?"

Protokoll-Lösungshilfe

Aufgabe: Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von 8?
Lösung der Hilfsaufgabe:
Lösung der Aufgabe:

Anteil	ganze Menge	Anteil zu einem Feld	Teil zu einem Feld	Anteil	Gesuchter Teil	Antwortsatz
$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	6	$\frac{3}{4}$ von 8 ist 6

Warum guckt er sich erst $\frac{1}{4}$ von 8 an?

$\frac{1}{4}$ von 8 ist die leichte Hilfsaufgabe: Man guckt nur 1 Feld vom Streifen an. Alle anderen kann man dann hochzählen:
$\frac{1}{4}$ von 8 ist 2, $\frac{2}{4}$ von 8 ist 4, $\frac{3}{4}$ von 8 ...

b) Legt selbst einige Anteile:

Eine Person löst die Aufgabe, die anderen kontrollieren. Wechselt euch ab. Notiert eure Ergebnisse im Protokollbogen.

1.2 Erarbeiten (15 - 20 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Operativ den Zusammenhang zwischen dem Zähler und dem Teil erarbeiten

Material: MB: Große Bruchstreifen, Plättchen, ggf. Protokoll-Lösungshilfe; KV: Protokollbogen

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann GA; c) Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: Lernende irritiert z.T. die immer gleiche Hilfsaufgabe. Impuls: Warum ist das so? → Weil immer derselbe Streifen / Nenner genutzt wird. Bedeutung von *Muster* klären. Beschreibung der Tabelle hilft, Muster zu entdecken.

Lösung:

$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$ von 24 ist 4
$\frac{1}{6}$	4	$\frac{2}{6}$	8	$\frac{2}{6}$ von 24 ist 8
$\frac{1}{6}$	4	$\frac{3}{6}$	12	$\frac{3}{6}$ von 24 ist 12

Lösung:

$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$ von 24 ist 12
$\frac{1}{3}$	8	$\frac{1}{3}$	8	$\frac{1}{3}$ von 24 ist 8
$\frac{1}{4}$	6	$\frac{1}{4}$	6	$\frac{1}{4}$ von 24 ist 6
$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$ von 24 ist 4

Zu beachten: Lernende stellen sich z.T. nicht lösbare Aufgaben: am Material klären.

1.2 Protokolle untersuchen

a) Was ist $\frac{1}{6}$ von 24, $\frac{2}{6}$ von 24, ...?

Übertrage die Anteile und die ganzen Mengen in den Protokollbogen und ergänze die fehlenden Angaben.

Welche Muster kannst du finden? Wie geht es weiter?

Anteil	ganze Menge
$\frac{1}{6}$	24
$\frac{2}{6}$	24
$\frac{3}{6}$	24

Der gesuchte Teil wird immer 4 mehr. Der Zähler wird größer.

b) Was ist $\frac{1}{2}$ von 24, $\frac{1}{3}$ von 24, ...?

Übertrage die Zahlen wie in a) und ergänze die fehlenden Angaben. Welche Muster kannst du finden?

Warum kann man die Aufgabe $\frac{1}{5}$ von 24 nicht gut lösen?

Anteil	ganze Menge
$\frac{1}{2}$	24
$\frac{1}{3}$	24
$\frac{1}{4}$	24
$\frac{1}{6}$	24

c) Eine Person denkt sich ein Muster wie in a) oder b) aus, die andere löst es. Wechselt euch ab.

1.3 Üben (5 - 10 Minuten)

Ziel: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Aufgaben erkennen

Material: MB: Große Bruchstreifen, Plättchen

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Zu beachten: Die operative Variation (3/4 → 2/4) kann am Material überprüft werden.
Impuls: Welchen Streifen nimmt sie jetzt? / Wie viele Felder? / Wie viele Plättchen? → 4er-Streifen / 2 Felder / zweimal 4 Plättchen.

1.3 Andere Anteile und andere Teile

a) Leonie hat die Aufgabe „Wie viel sind $\frac{3}{4}$ von 16 ?" gelegt. Welchen Streifen nimmt sie?

Jetzt soll sie $\frac{2}{4}$ von 16 bestimmen. Was muss sie verändern?

b) Tim hat $\frac{2}{3}$ von 24 bestimmt. Jetzt bestimmt er $\frac{3}{4}$ von 24. Was muss er verändern?

1.4 Üben (5 - 10 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Handlung verinnerlichen und vom Material ablösen

Material: MB: Große Bruchstreifen, Plättchen

Umsetzung: a) UG; b) Aufgabengenerator (PA)

Methode: Lehrperson moderiert Aufgabe als gemeinsame Vorstellungsübung, d.h. diktiert Aufgaben und bittet Lernende, sich alles im Kopf vorzustellen.

Weitere Aufgaben zur Vorstellungsbildung lösen.

1.4 Anteile und Streifen im Kopf vorstellen

a) Tara bekommt $\frac{3}{4}$ von 20 Bonbons. Stelle dir die Bonbons auf dem Streifen vor:

Welchen Bruchstreifen stellst du dir vor?
Welcher Anteil gehört zu einem Feld? Wie viele Bonbons sind das?
Wie viele Felder braucht man, um den Anteil $\frac{3}{4}$ zu zeigen?
Wie viele Bonbons sind dann $\frac{3}{4}$ von 20 Bonbons? Überprüfe am Streifen.

b) Eine Person stellt eine Aufgabe wie in a), die andere löst sie. Ihr könnt dazu die Fragen von oben nutzen. Wechselt euch ab.

1.5 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

Ziel: Auswirkung der operativen Variation des Ganzen und des Rests auf den Anteil in strukturierter ikonischer Darstellung untersuchen

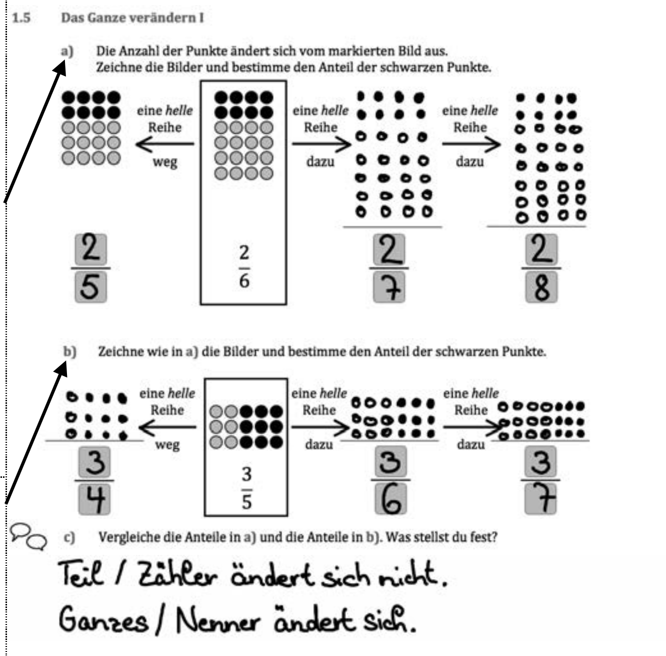
Material: MB: Ggf. große Bruchstreifen, Plättchen

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c) UG

Zu beachten: Einigen Lernenden bereitet der Wechsel von den „dynamischen“ Plättchen, die umgelegt werden können, zu den „statischen“ Punktebildern Schwierigkeiten.

Methode: Es kann helfen, sich die Aufgabe auf dem Bruchstreifen vorzustellen (Blatt notfalls drehen): Die Reihen sind die Felder, die Punkte die zu verteilende Plättchenmenge.
Impuls: Wie viele Plättchen habe ich? Wie viele liegen auf einem Feld?
Methode: Lernende sollten zunächst den vorgegebenen Anteil am Bild erklären. Werden gekürzte Anteile angegeben, diese ebenfalls thematisieren und warum man dann das Muster nicht so gut sieht.

Zu beachten: Manchen Lernenden bereitet der Wechsel der Ausrichtung der Punktebilder Schwierigkeiten (von vertikal in a) zu horizontal in b) und umgekehrt). Hier kann die Anbindung an die Bruchstreifen helfen.



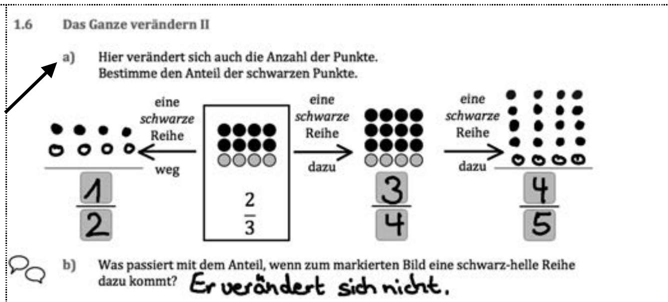
1.6 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

Ziel: Auswirkung der operativen Variation des Ganzen und des Teils auf den Anteil in strukturierter ikonischer Darstellung untersuchen

Material: MB: Ggf. große Bruchstreifen, Plättchen

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Zu beachten: Einigen Lernenden bereitet der Wechsel von den „dynamischen“ Plättchen, die umgelegt werden können, zu den „statischen“ Punktebildern Schwierigkeiten. Es sollte eine zunehmende Loslösung vom Material stattfinden, dennoch rückbindende Erklärung in b) hilfreich.
Methode: Es kann helfen, sich die Aufgabe auf dem Bruchstreifen vorzustellen (Blatt notfalls drehen): Die Reihen sind die Felder, die Punkte die zu verteilende Plättchenmenge.
Impuls: Wie viele Plättchen habe ich? Wie viele liegen auf einem Feld?
Methode: Lernende sollten zunächst den vorgegebenen Anteil am Bild erklären.
Weitere Aufgabe: Welches Muster kann man hier erkennen? → Es ändern sich der Teil und das Ganze (Zähler und Nenner).



1.7 **Erarbeiten (10 - 15 Minuten)**

Ziel: Auswirkung der operativen Variation des Ganzen auf den Anteil in strukturierter und unstrukturierter ikonischer Darstellung untersuchen

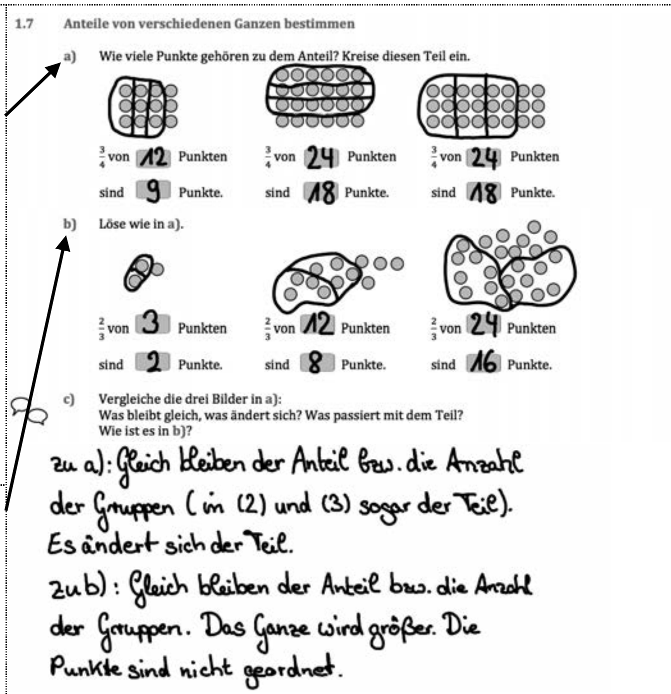
Material: -

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Hintergrund: Strukturierung des Ganzen durch den Anteil stellt für einige Lernende eine große Herausforderung dar. Hier sieht man, wer das Bilden von Gruppen am Material inhaltlich verstanden hat und wer eher mit dem Kalkül argumentiert.

Zu beachten: Bild (2) und (3) stellen für Lernende trotz gleicher Punktzahl z.T. ganz unterschiedliche Anforderungen: Von (1) nach (2) und von (2) nach (3) wechselt Orientierung, wenn man in Reihen strukturiert. In (1) Betrachtung der Spalten, in (2) Betrachtung der Zeilen. In (3) müssen 2 Spalten als Einheit interpretiert werden.
Hilfestellung: zu (2) und (3): Wo / wie sehe ich die 4? → In Zeilen / immer 2 Spalten zusammenfassen.

Zu beachten: Unsortierte Punkte erschweren z.T. das Strukturieren. An die Verteilhandlung anknüpfende Fragen: Woher weiß ich, wie viele Gruppen ich bilden muss? → Nenner. Wie viele Punkte pro Gruppe? → Punktemenge geteilt durch Nenner.
Wie viele Mengen davon? → Zähler



2 Anteil von Mengen berechnen

2.1 **Erarbeiten (20 - 30 Minuten)**

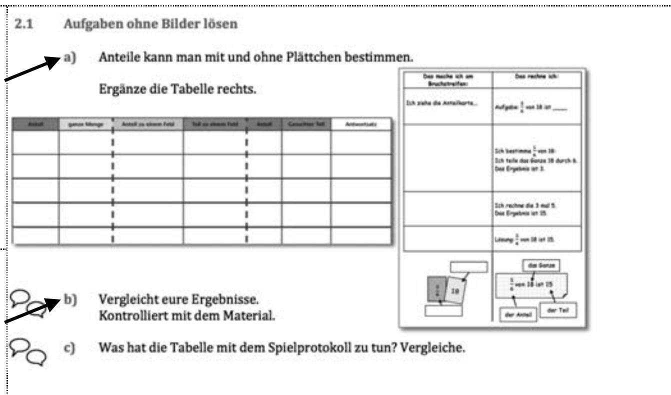
Ziel: Den Kalkül aus der Verteilhandlung inhaltlich motivieren

Material: MB: Große Bruchstreifen, Plättchen; KV: Ggf. Protokollbogen, Tabelle Bruchstreifen / Rechnung

Umsetzung: a), b), c) jeweils EA, dann PA, dann UG

Zu beachten: Wenn Lernende Probleme bei Verschriftlichung des Vorgehens haben, dieses zunächst mündlich erklären lassen. Ggf. b) vorziehen und am Material nachvollziehen. Die Lehrperson denkt sich dann eine weitere Aufgabe nach diesem Muster aus und gibt die Rechenschritte vor. Die Lernenden überlegen jetzt wirklich im Kopf.

Lösung: Kalkül beschreibt die Handlung am Material. Kärtchen stehen für die ganze Menge bzw. den Anteil.
Hilfestellung: Wo findet man die Zahlen wieder?



2.2 Üben (30 - 40 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Verknüpfen von Inhalt und Kalkül bzw. Plausibilisieren von Kalkül

Material: MB: Ggf. große Bruchstreifen und Plättchen

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: Lernende nach ihrem Vorgehen fragen. Schwächere Lernende brauchen z.T. noch Rückgriff auf das Material. Dies sollte hier aber nur noch zur Kontrolle geschehen, da das Ziel die Ablösung vom Material darstellen sollte.
Dennoch vorstellungsgebundene Begründungen einfordern bzw. Hilfestellungen für den Kalkül geben: Wie sähe das jetzt am Material aus? Welchen Streifen müsste man denn nehmen? etc. Muster können auch nachträglich am Material erklärt werden.

Impuls: Woran liegt das? → 1., 2., 3., 5. Päckchen: Anteil bleibt gleich, Ganzes wird jeweils 2mal / 3mal so groß bzw. halbiert. 4. Päckchen: Ganzes bleibt gleich, Anteil wird halbiert → Streifen hat doppelt so viele Felder → halb so großer Teil.

2.2 Anteile berechnen

a) Löse die Aufgaben wie in der rechten Spalte in 2.1 a). Was fällt dir auf?

(1) $\frac{3}{4}$ von 8 ist 6
(2) $\frac{3}{4}$ von 16 ist 12
(3) $\frac{3}{4}$ von 32 ist 24

(1) $\frac{2}{5}$ von 5 ist 2
(2) $\frac{2}{5}$ von 15 ist 6
(3) $\frac{2}{5}$ von 45 ist 18

(1) $\frac{4}{5}$ von 10 ist 8
(2) $\frac{4}{5}$ von 20 ist 16
(3) $\frac{4}{5}$ von 40 ist 32

(1) $\frac{3}{4}$ von 48 ist 36
(2) $\frac{3}{8}$ von 48 ist 18
(3) $\frac{3}{16}$ von 48 ist 9

(1) $\frac{7}{9}$ von 72 ist 56
(2) $\frac{7}{9}$ von 36 ist 28
(3) $\frac{7}{9}$ von 18 ist 14

Zu beachten: Bei nicht lösbaren Aufgaben am Material klären, warum sie nicht lösbar sind.

b) Eine Person stellt eine Aufgabe wie in a), die andere löst sie. Wechselt euch ab.

2.3 Üben (30 - 45 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Systematisch Zusammenhänge zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen in verschiedenen Richtungen und Repräsentationen durcharbeiten

Material: MB: Ggf. große Bruchstreifen, Plättchen

Umsetzung: a) EA; b) EA, dann PA, dann UG; Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: Schwer fällt meist Zeile (6), da Aufgabenrichtung anders ist: Aus dem Anteil 3/4 und dem Teil 4 lassen sich weder das Ganze noch der Teil zu 3/4 direkt errechnen. Es sind Umstrukturierungen der gewohnten Zugangsweisen notwendig, die jedoch zu einer Flexibilisierung des Denkens beitragen können. Bei großen Schwierigkeiten mit (6) auch konkret am Material legen lassen und weitere strukturgleiche Aufgabe lösen lassen (z.B. Anteil 2/3 und Teil zu 1/3 ist 5).

Impuls: Zu Zeile (2): Stell dir das Material vor: Welcher Streifen? Was ist die 4? → 4er-Streifen.

2.3 Fehlende Angaben herausfinden

a) Im Protokoll sind Lücken. Ergänze das Protokoll.
Welche Muster kannst du finden?

Anteil	ganze Menge	Anteil zu einem Feld	Teil zu einem Feld	Anteil	Gesuchter Teil	Antwortsatz	Bild
$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	6	$\frac{3}{4}$ von 8 ist 6	
$\frac{3}{4}$	24	1/4	6	3/4	18	$\frac{3}{4}$ von 24 ist 18	
6/8	16	$\frac{1}{8}$	2	6/8	12		
3/5	10	1/5	2	3/5	6		
$\frac{6}{8}$	32	1/8	4	6/8	24		
$\frac{3}{4}$	16	1/4	4	3/4	12		

b) Vergleicht die letzte Zeile eurer Protokolle: Wie habt ihr die Lösung gefunden? Schreibt euren Rechenweg auf.

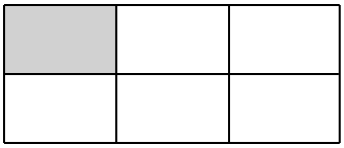
Zu beachten: Bei nicht lösbaren Aufgaben am Material klären, warum sie nicht lösbar sind.

c) Eine Person stellt eine ähnliche Aufgabe wie in a), die andere löst sie. Wechselt euch ab.

Kann ich Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen?

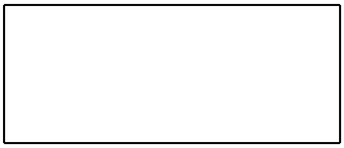
1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



Anteil:

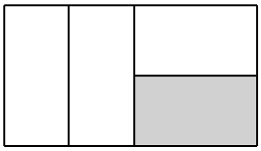
b) Zeichne den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt.



Anteil: $\frac{1}{8}$

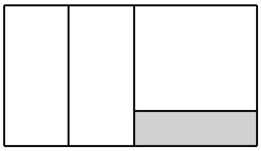
c) Gib den Anteil für den grauen Teil an.

(1)



Anteil:

(2)



Anteil:

d) Erkläre deine Lösung zum Bild **c)** (2):
s

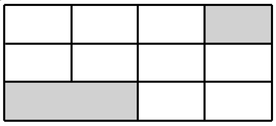
2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib jeweils den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.

(1)

Anteil:

(2)

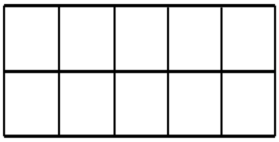


Anteil:

b) Erkläre deine Lösung zu Bild **a)** (2):

c) Zeichne für beide Bilder den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt.

(1)



Anteil: $\frac{7}{10}$

(2)

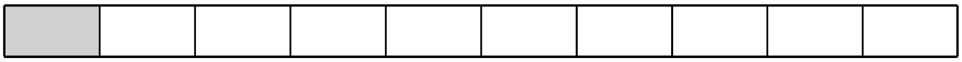
Anteil: $\frac{3}{4}$

Kann ich Prozente bestimmen und darstellen?

1 Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen

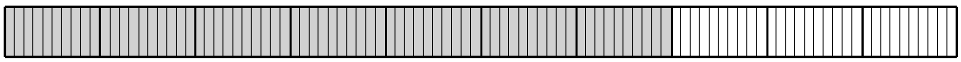
a) Schreibe als Prozent: $\frac{30}{100} = \square$ %

b) Lies ab, wie viel Prozent vom Streifen gefärbt sind. Gib auch den Anteil an.



0 1

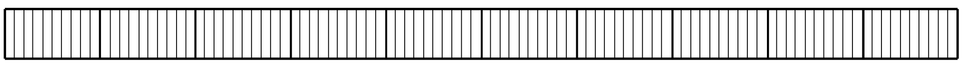
Prozent: $\square$ % Anteil: $\frac{\square}{\square}$



0 1

Prozent: $\square$ % Anteil: $\frac{\square}{\square}$

c) Zeichne die Prozente farbig ein. Gib auch den Anteil an.



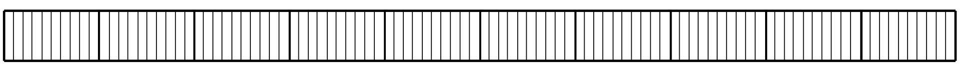
0 1

Prozent: 45 % Anteil: $\frac{\square}{\square}$

0 1

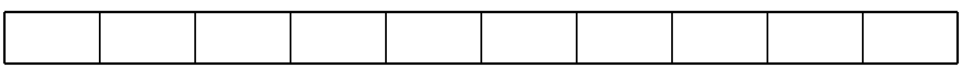
Prozent: 50 % Anteil: $\frac{\square}{\square}$

d) Zeichne den Anteil farbig ein. Gib auch die Prozentzahl an.



0 1

Prozent: $\square$ % Anteil: $\frac{20}{100}$



0 1

Prozent: $\square$ % Anteil: $\frac{6}{10}$

☺ 😐 ☹

Kann ich Anteile von Mengen bestimmen und darstellen?

1 Anteile von Mengen bestimmen

a) Wie viele Kinder sind das? Schreibe die Zahl auf.

$\frac{1}{4}$ von 12 Kindern sind ☐ Kinder. $\frac{3}{5}$ von 30 Kindern sind ☐ Kinder.

b) Wie viele Kinder sind $\frac{2}{3}$ von 12 Kindern? Zeige mit einem Bild.

Bild:

c) Wie viele Kinder sind $\frac{5}{6}$ von 18 Kindern? Zeige mit einem Bild.

Bild:

☺ 😐 ☹

2 Anteile von Mengen berechnen

a) Wie viele Bonbons sind das?
Berechne ohne Bild.

(1) $\frac{1}{4}$ von 48 Bonbons sind ☐ Bonbons.

(2) $\frac{4}{7}$ von 56 Bonbons sind ☐ Bonbons.

(3) $\frac{7}{8}$ von 72 Bonbons sind ☐ Bonbons.

b) Erkläre deine Rechnung zu **a)** (3).

Erklärung:

c) Schreibe den Anteil für die Bonbons auf: $\frac{☐}{☐}$ von 8 Bonbons sind 6 Bonbons.

☺ 😐 ☹