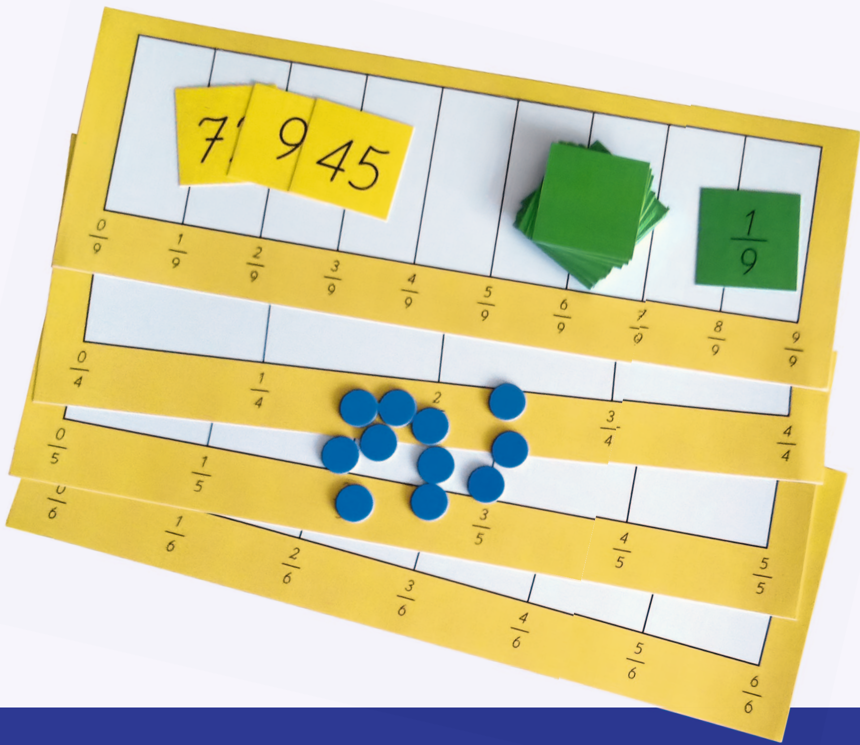
Für Lehrerinnen und Lehrer

Mathe sicher können

Auszug "B2 - Gleichwertigkeit verstehen" aus:

Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen



Brüche, Prozente, Dezimalzahlen

Ermöglicht durch
Deutsche Telekom Stiftung

Cornelsen

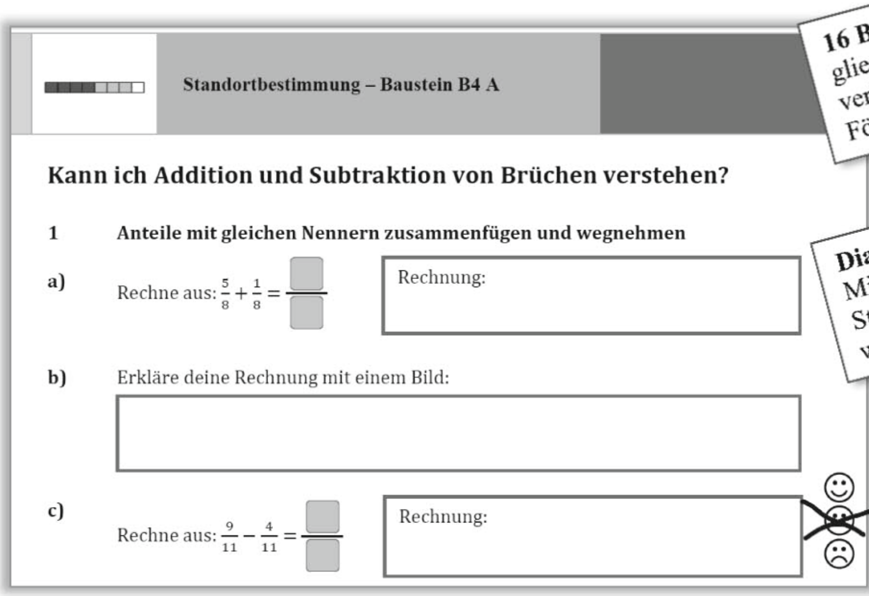
Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

9783060065363 U1+U4.indd 1 23.01.14 11:39

So funktioniert das Diagnose- und Förderkonzept

In den 16 Diagnose- und Förderbausteinen erarbeiten Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern wichtige Basiskompetenzen.

16 Basiskompetenzen gliedern die Bausteine und verbinden Diagnose und Förderung.


Standortbestimmung – Baustein B4 A

Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

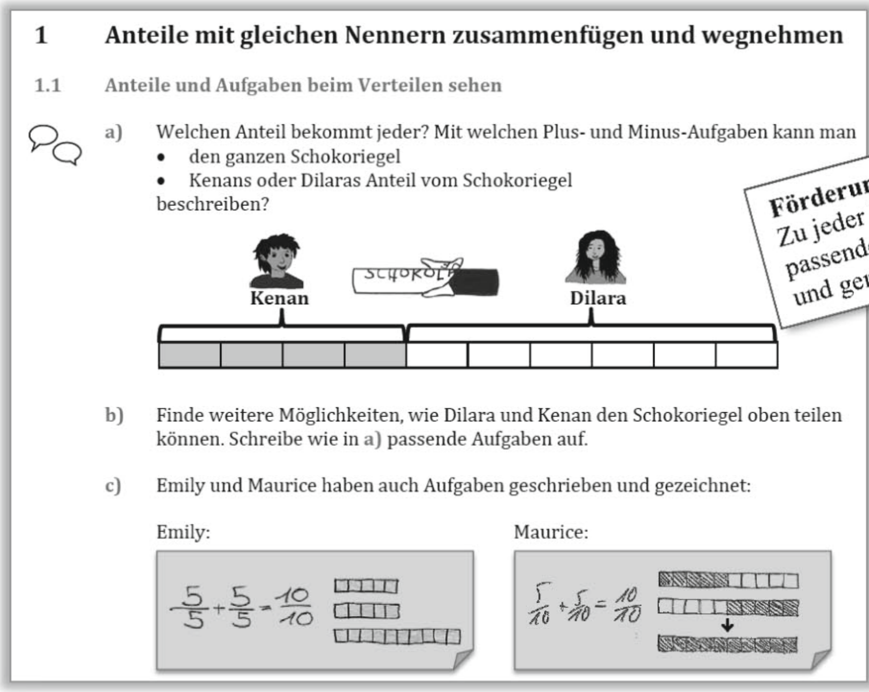
a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

Diagnose: Mit 2 bis 4 Aufgaben in der Standortbestimmung stellen Sie fest, was die Lernenden schon können.

Die Standortbestimmungen befinden sich im hinteren Teil dieser Handreichungen als Kopiervorlage.


1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
- Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel

beschreiben?

b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.

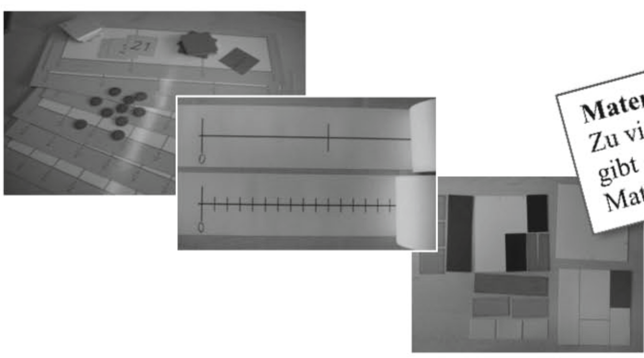
c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

Emily: $\frac{5}{5} + \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$

Maurice: $\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10}$

Förderung: Zu jeder Diagnoseaufgabe gibt es eine passende Fördereinheit, die differenziert und gemeinsam bearbeitet wird.

Die Fördereinheiten sind in einem eigenen Förderheft abgedruckt und in dieser Handreichung erläutert.



Material: Zu vielen Förderaufgaben gibt es Material, mit dem man Mathe besser verstehen kann.

Tipps zum Material sind in dieser Handreichung.
Viele Materialien befinden sich im zugehörigen Materialkoffer von Cornelsen Experimenta

Mathe sicher können

Handreichungen
für ein Diagnose- und Förderkonzept
zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen

Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

Entwickelt und Erprobt von
Stephan Hußmann
Birte Pöhler
Susanne Prediger
Andrea Schink
Lara Sprenger

Erarbeitet an der Technischen Universität Dortmund
im Rahmen von `Mathe sicher können´, einer Initiative der Deutsche Telekom Stiftung.

technische universität dortmund

Deutsche Telekom Stiftung

Herausgeber: Susanne Prediger, Christoph Selter, Stephan Hußmann, Marcus Nührenbörger
Autorinnen und Autoren: Stephan Hußmann, Birte Pöhler, Susanne Prediger, Andrea Schink, Lara Sprenger

Redaktion: Corinna Mosandl, Birte Pöhler, Lara Sprenger
Illustration der Figuren: Andrea Schink
Alle sonstigen Bildrechte für Illustrationen und technische Figuren liegen bei den Herausgebern.

Umschlaggestaltung: Corinna Babylon

Unter der folgenden Adresse befinden sich multimediale Zusatzangebote:
www.mathe-sicher-koennen.de/Material

1. Auflage, 1. Druck 2014

Druck: DBM Druckhaus Berlin-Mitte GmbH

ISBN 978-3-06-006536-3

PEFC/04-31-2206

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.
www.pefc.de

Dieses Dokument enhält folgenden Auszug:

Inhaltsverzeichnis der Handreichungen Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Dezimalverständnis – Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen

Rechnen mit Dezimalzahlen – Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen

Zusammenhang von Dezimalzahlen und Brüchen – Hinweise zu dem Diagnose- und Förderbaustein

B2 A Gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden – Didaktischer Hintergrund

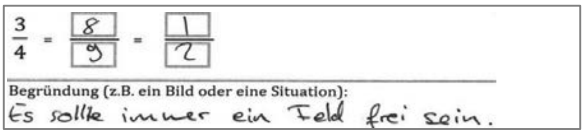
Lerninhalt

Unter gleichwertigen Brüchen versteht man solche, die denselben Anteil (von einem Ganzen, wie in Baustein **B1 A** oder von Mengen, Baustein **B1 C**) beschreiben: Wer 1/2 von der Pizza bekommt, bekommt genauso viel Pizza-Anteil, wie jemand, der 2/4 oder 4/8 Pizza bekommt. In dieser Einheit wird Gleichwertigkeit in der Vorstellung vom Anteil von einem Ganzen erarbeitet. Für Lernende ist dieser Begriff nicht intuitiv, deshalb wird hier meist von *gleich großen Anteilen* gesprochen.

Das Verständnis der Gleichwertigkeit von Anteilen ist zentraler Bestandteil eines Bruchrechencurriculums: Es ist notwendige Voraussetzung für die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs und bildet die inhaltliche Vorstellung zum Erweitern und Kürzen, den späteren formalen Verfahren zum Finden gleichwertiger Brüche (Baustein **B2 B**).

Gleich große Anteile als Voraussetzung für das Verständnis gleichwertiger Brüche

Die Gleichwertigkeit von Brüchen als *gleich große Anteile* ist für manche Lernende nicht leicht zu verstehen. Einige aktivieren z.T. nicht tragfähige Vergleichsstrategien (siehe Abbildung) oder verwechseln *gleich groß*, auch wegen der sprachlichen Nähe, mit *gleichnamig* (siehe Baustein **B3 A**).



Nicht tragfähige Vergleichsstrategie

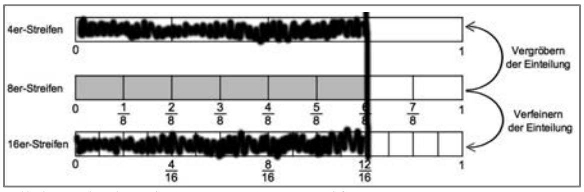
Verfeinern und Vergröbern

Notwendige Voraussetzung zum Verständnis der Gleichwertigkeit für Anteile eines Ganzen sind die inhaltlichen Vorstellungen des *Verfeinerns* und *Vergröberns* der Einteilung des Ganzen und des zugehörigen Teils.

Verfeinert und vergröbert werden kann sowohl in der Darstellung von Flächen als auch mit Bruchstreifen, wobei letztere die in dieser Förderung zentralen Anschauungsmittel sind.

Beim Vergröbern wird die Strukturierung des Ganzen und des Teils gröber, d.h. die einzelnen Stücke werden größer. Beim Verfeinern wird die Strukturierung feiner, d.h. die einzelnen Stücke werden kleiner. Wichtig ist, dass beim Verfeinern jeweils *sowohl der Teil, als auch das Ganze gleichmäßig verfeinert werden*. Teil und Ganzes werden durch neue Einheiten beschrieben: Werden der Bruchstreifen und der markierte Teil mit Achteln beschrieben, sind 6/8 gefärbt, beschreibt man sie mit Sechszehnteln, sind es 12/16, mit Vierteln sind es 3/4. Durch die gleichzeitige Verfeinerung von Teil und Ganzem ergibt sich ein neuer Anteil, der genauso groß ist wie der ursprüngliche.

In der Streifentafel findet man vergröberte und verfeinerte Streifen durch Schauen nach oben oder unten, sie hängen also eng zusammen.



Blick nach oben / unten vom 8er-Streifen aus

Manche Lernende betrachten in der Streifentafel nur Anteile in feineren Streifen. Sie müssen darauf aufmerksam gemacht werden, dass man zwar nicht jeden Anteil vergröbern kann, dass aber dennoch systematisch gesucht werden sollte. Erst so erwerben Lernende eine flexible inhaltliche Grundlage für das spätere Kürzen und Erweitern von Brüchen (Baustein **B2 B**).

Veranschaulichung und Material

Notations- und Sprechweise

Manche Lernende können sich unter dem Begriff *Vergröbern* intuitiv nichts vorstellen – sie verwechseln den Begriff z.T. mit *Vergrößern*. Es sollte daher an einem Beispiel geklärt werden, was *grob* bedeutet (z.B. „Bei einem groben Sieb sind die Löcher größer, sodass sogar Kies durchfallen kann.“).

Die sprachliche Schwierigkeit wird auf konzeptioneller Ebene durch die Tatsache verschärft, dass die einzelnen Abschnitte – die jeweils kleinsten Einheiten – des Bruchstreifens beim Vergröbern tatsächlich größer werden: Viertel sind größer als Achtel vom selben Ganzen. Wichtig ist, herauszustellen, dass beim Vergröbern zwar die einzelnen Stücke vom Ganzen größer werden, nicht jedoch der Anteil: Die *Einteilung* von Teil und Ganzem hat *keinen Einfluss auf die Größe des Teils* und damit des Anteils.

Die Erarbeitung der Begriffe *Vergröbern* und *Verfeinern* sollte vorstellungsgebunden, an die Struktur der Streifentafel angelehnt, geschehen. Wichtig ist, dass Lernende verstehen, dass beide Begriffe ein Gegensatzpaar darstellen und zwei Sichtweisen bzw. Interpretationen der Struktur der Streifentafel darstellen (s.o.).

Die Notation der Gleichwertigkeit der Anteile durch ein Gleichheitszeichen macht den Lernenden dagegen weniger Schwierigkeiten, die Umschreibung als *gleich groß* legt dies nahe.

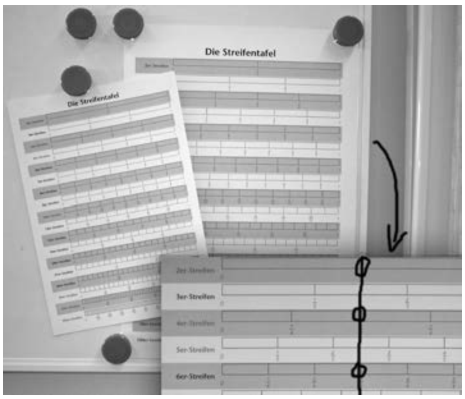
Bruchstreifen

Für den Erstzugriff auf das Finden gleich großer Anteile werden wie in Baustein **B1 B** gleich lange Bruchstreifen als mathematische Veranschaulichung von Fortschrittsbalken am PC genutzt. Diese sind z.T. bereits vorstrukturiert, z.T. handelt es sich um leere Streifen, für die die notwendige Strukturierung erst gefunden werden muss. Gleich große Anteile werden hier als gleich lange Markierungen in gleich langen Streifen interpretiert.

Streifentafel

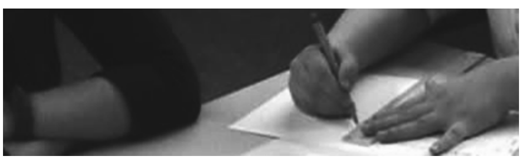
Eine Erweiterung und Systematisierung der Bruchstreifen stellt die Streifentafel dar: In der Streifentafel sind zunehmend verfeinerte Bruchstreifen übereinander angeordnet (insgesamt 18 Streifen; vom 2er- bis zum 10er-Streifen alle, danach nur ausgewählte wie die Teiler von 100 bis zum 100er-Streifen).

Diese Tafel wird auch in späteren Bausteinen genutzt, um die Gleichwertigkeit von Brüchen und Prozenten und das Gleichnamigmachen zu erarbeiten (Bausteine **B2 B, B2 C, B3 A**), Brüche und Prozente zu ordnen (Baustein **B3 B**) und zu addieren (Baustein **B4 A**).



Gleichgroße Anteile in der Streifentafel

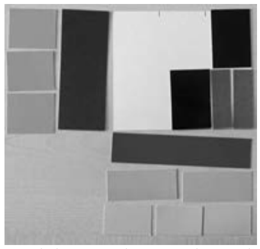
In der Streifentafel liegen gleich große Anteile auf einer vertikalen Linie, so können Lernende mit einem Lineal *mehrere gleich große Anteile gleichzeitig* identifizieren. Die gefundenen Muster können auf der Tafel mit abwischbaren Folienstiften eingetragen werden.


Gleich große Anteile liegen auf einer Linie

Im Materialkoffer befindet sich als Anschauungsmittel für Erarbeitung und Diskussion in Gruppen auch eine große Tafel.

Bruchpuzzle

Für die Übertragung und Flexibilisierung der Vorstellung zur Gleichwertigkeit von den eher linear gedachten Bruchstreifen hin zu flächigen Ganzen wird das Bruchpuzzle aus dem Materialkoffer eingesetzt: Gleich große Anteile werden hier über das Auslegen der Puzzleteile bzw. -fläche identifiziert. So lässt sich etwa das Viertel vom Ganzen mit dem Achtel bzw. Zwölftel vom Ganzen auslegen und beschreiben.


Beziehungen im Bruchpuzzle

Aufbau der Förderung

Fördereinheit 1 (Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden) beginnt zunächst mit einer intuitiven Nutzung der Gleichwertigkeit, indem Anteile in verschiedene bereits strukturierte Bruchstreifen übertragen werden. Dieses Vorgehen ist ähnlich zu dem in Baustein **B1 B**, da die Streifen an Fortschrittsbalken angelehnt werden.

In **Fördereinheit 2 (Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden)** wird der Aufbau der Streifentafel erarbeitet: Mittels Orientierungsübungen („Wo findet man 1/2, etc.?“) erlangen Lernende Sicherheit im Identifizieren und Nutzen der zentralen Strukturen und beschreiben sie als Muster. Die bereits intuitiv genutzte Gleichwertigkeit wird auf die Streifentafel übertragen. Anschließend werden die Begriffe Verfeinern und Vergröbern erarbeitet und mit den zwei Blickrichtungen in der Streifentafel verknüpft. Die zuvor vorgegebenen und genutzten Strukturen (Aufteilung des Streifens) werden nun selbst hergestellt und es findet eine erste Loslösung vom konkreten Anschauungsmaterial statt: Die Streifentafel hat wegen ihrer endlichen Struktur nur eine begrenzte Anwendbarkeit. So werden erste Überlegungen zu einer Systematisierung angestellt.

Die Einheit schließt mit der Flexibilisierung der Vorstellung von Gleichwertigkeit in Situationen sowie in echt flächigen Darstellungen (Bruchpuzzle; siehe auch Baustein **B1 A**).

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 46 - 57.

Prediger, S. (2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. In: Der Mathematikunterricht 57(3), 5 - 14.

B2 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 15 - 20 Minuten

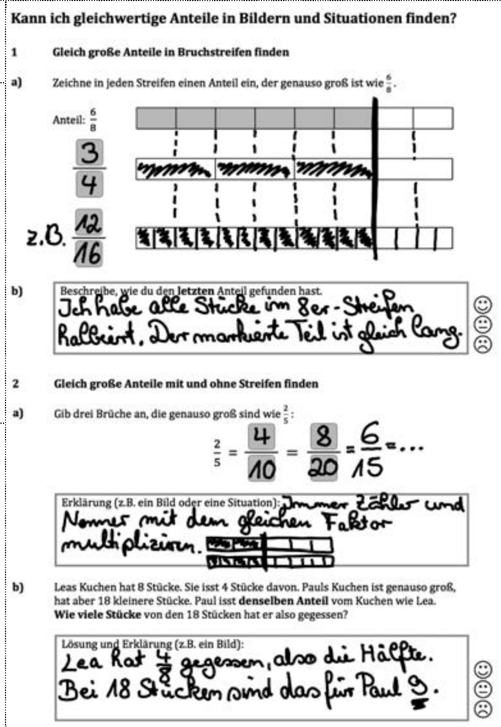
Hinweise zur Durchführung:

Lernende müssen mit der Idee gleich großer Anteile in Bruchstreifen vertraut gemacht werden.

„Du sollst in jedem Streifen einen Anteil markieren, der genauso groß ist wie 6/8, aber anders heißt.“
Keine Lösungsidee für 1b) vorwegnehmen.

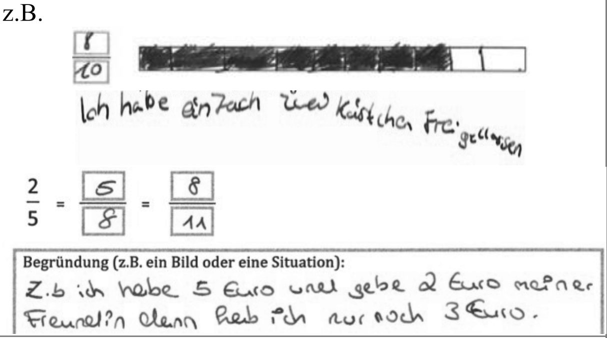
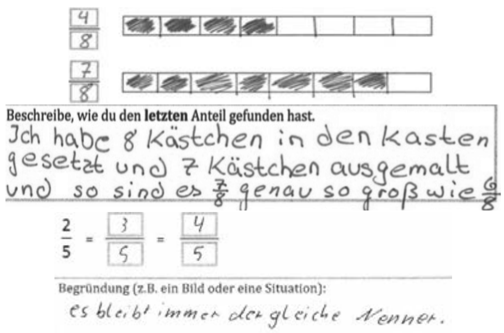
2 a) Hinweis auf „anders benannte“ Anteile bzw. auf 1). Nicht auf die Bruchstreifen verweisen, damit individuelle Erklärungen nicht ausgeschlossen werden.

2 b): Inhaltlich komplex. Zur Verständnissicherung auch paraphrasieren, ohne die Vorstellungen zu sehr einzuengen (z.B. durch die Aufforderung, Kuchen zu zeichnen etc.).

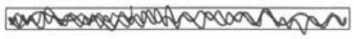
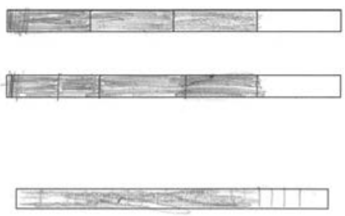
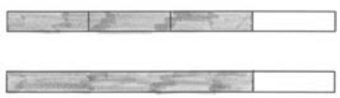


Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1), 2.a)	z.B. 	Gleich große Anteile werden über die Differenz von Zähler und Nenner bzw. den fehlenden Teil zum Ganzen bestimmt. Ist dieser Wert gleich, sind die Anteile gleich groß (hier beim Streifen z.B. 6/8 = 8/10, da 8 - 6 = 10 - 8 = 2).	Erarbeitung der Bedeutung von *gleich groß* (1.1 - 1.2). Erarbeitung der Strukturierung des Streifens durch den Anteil (2.1 - 2.3). Erweiterung über die Streifentafel hinweg (2.4) und Üben in einer anderen flächigen Repräsentation (2.6).
	z.B. 	Gleich große Anteile werden auf die Größe der einzelnen Stücke (Einheiten) des Bruchstreifens bezogen, alle Achtelbrüche wären dann gleich groß. Werden 4 und 3 als Zähler genommen, so kann dahinter auch das Halbieren der 6 und der 8 in 6/8 stehen.	

Diagnoseaufgabe 1: Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a), b)	z.B. $\frac{2}{4}$ 	*Gleich groß* wird auf das Verhältnis von Teil und Rest übertragen und nicht auf verschiedene Anteile.	Erarbeitung der Bedeutung von *gleich groß* (1.1 - 1.2).
	z.B. $\frac{2}{2}$  Es wird der Anteil 1 angegeben.	Eventuell bereitet das Strukturieren Schwierigkeiten: Wenn keine Stücke vorgegeben sind, kann man auch nur den ganzen Streifen ausmalen.	
	z.B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{12}{16}$ 	Es wird ungenau gezeichnet. Wenn ein anderer Anteil dabei entsteht (erstes Bild), kann auch eine nicht tragfähige Bruchvorstellung zugrunde liegen. Wenn der richtige Anteil bestimmt wurde, aber der Streifen nicht bündig abschließt, kann *gleich groß* eventuell nicht mit der Länge der Streifen ausreichend verknüpft werden.	Erarbeitung der Strukturierung des Streifens durch den Anteil (2.1 - 2.3). Erweiterung über die Streifentafel hinweg (2.4) und Üben in einer anderen flächigen Repräsentation (2.6).
	z.B. $\frac{3}{4}$, [illegible] 	Was *gleich groß* für Streifen bedeutet, scheint verstanden worden zu sein. Die Umsetzung deutet auf Schwierigkeiten hin, den Teil geeignet zu strukturieren.	

Diagnoseaufgabe 2: Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)	Nur der Zähler oder nur der Nenner wird geändert.	U.U. haben Lernende das Erweitern als Multiplizieren im Kopf, haben aber keine inhaltliche Vorstellung von der Operation erworben.	Erarbeitung der Bedeutung von *gleich groß* (1.1 - 1.2). Erarbeitung der Strukturierung des Streifens durch den Anteil (2.1 - 2.3). Erweiterung über die Streifentafel hinweg (2.4) und Üben in einer anderen flächigen Repräsentation (2.6).
	z.B. $\frac{2}{5} = \frac{5}{2} = \frac{4}{3}$ Begründung (z.B. ein Bild oder eine Situation): $\frac{2}{5} = 7 = \frac{5}{2} = 7 = \frac{4}{3} = 7$	*Gleich groß* wird auf die Summe von Zähler und Nenner bezogen.	
b)	„Paul hat 4 Stücke gegessen."	Teil und Anteil werden verwechselt: Paul isst denselben Anteil wie Lea, aber nicht denselben Teil (= 4 Stücke).	Erarbeitung der Gleichwertigkeit von Anteilen (2.1 - 2.3). Bearbeiten von Situationen zur Gleichwertigkeit (2.5).
	„Paul hat 14 Stücke gegessen: 18 - 4."	Der Teil von Lea wird von Pauls Ganzem abgezogen.	
	„Paul hat 6 Stücke gegessen: 18 - 12 = 6."	Leas Ganzes und Teil werden addiert und von Pauls Ganzem subtrahiert.	Überprüfung und bei Bedarf Wiedererarbeitung des Bruchverständnisses (**B1 A**).
	„Paul hat 8 Stücke gegessen."	Das Ganze von Lea wird als Teil von Paul interpretiert.	

1 Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

1.1 Erarbeiten (15 - 20 Minuten)

Ziel: Anteile in Bruchstreifen intuitiv (über die Länge des Streifens) vergleichen

Material: -

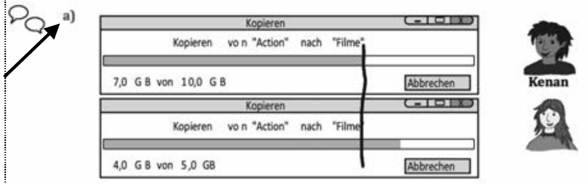
Umsetzung: a) UG); b), c) jeweils EA, dann UG

Hintergrund: Lebensweltlicher Kontext *Fortschrittsbalken* wird in **B1 B** eingeführt.

Impuls: Zusammenhang von Teil, Anteil und Ganzem ansprechen, an **B1 A** anknüpfen: Wo wären mehr Stücke? Wie viele wären das? Wäre ein Stück im ersten Streifen kleiner oder größer? → Mehr Stücke im ersten Streifen / 7 von 10 Stücken / kleiner.
Zu beachten: U.U. irritiert, dass die größere GB-Angabe beim kleineren Anteil (und nicht beim größeren) steht. Größerer Anteil kann nicht über absolute Betrachtung der GB (etwa des noch zu ladenden Teils) bestimmt werden. Gegenbeispiel geben: Bei 3 von 4 GB hat der Computer weniger geladen als bei 8 von 10 GB, auch wenn nur noch 1 GB (und nicht 2 GB) fehlt. Systematische Größenvergleiche in **B3 B**.

1.1 Anteile in Downloadbalken vergleichen

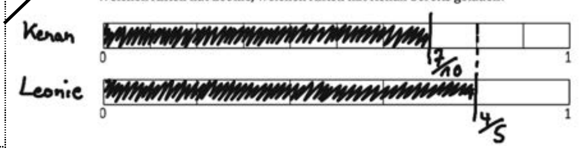
a)



Kenan und Leonie wollen beide einen Film herunterladen.
Welcher Computer hat im Moment mehr GB geladen? Kenans Computer.
Welcher Computer hat den größeren Anteil geladen, ist also schon weiter?
Leonies Computer (→ längerer Streifen).

Zu beachten: Wenn Lernende hier bereits über *Erweitern* und *Kürzen* reden, dennoch auch inhaltliche Verknüpfung mit gleich langen Streifen vornehmen.

b) Du kannst die Anteile auch mit Bruchstreifen vergleichen:
Übertrage die Anteile in die Bruchstreifen und lies die Anteile ab.
Welchen Anteil hat Leonie, welchen Anteil hat Kenan bereits geladen?



Lösung: 4/5 ist in beiden Streifen ablesbar. Systematisch wird das später erarbeitet, kann hier aber intuitiv entdeckt und beschrieben werden.

c) Die beiden Anteile sind nicht gleichwertig, also nicht gleich groß.
Welche Anteile wären gleich groß? z.B. $\frac{4}{5}$ und $\frac{8}{10}$.

1.2 Erarbeiten (5 - 10 Minuten)

Ziel: Weitere gleich große Anteile in Darstellungen ohne Kontext finden

Material: -

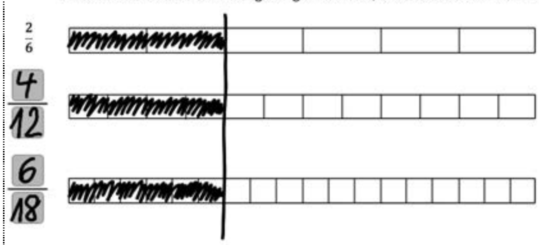
Umsetzung: EA, dann UG

Lösung: Entdeckbare Strategie: Striche durch alle Streifen zeichnen – gleich große Anteile sind gleich lang.

Typische Schwierigkeit: Lernende irritiert z.T., dass der Anteil gleich bleiben soll, aber der Streifen wechselt. Sie nennen dann alle Brüche „2/6". Dies ist nicht falsch, dennoch auch explizit nach einer anderen Beschreibung vom Anteil fragen: Wie kann der Anteil im 12er Streifen noch heißen, gibt es weitere Möglichkeiten?

1.2 Gleich große Anteile ablesen und einzeichnen

Finde mit den Bruchstreifen drei gleich große Anteile, die unterschiedlich heißen.



2 Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

2.1 Erarbeiten und Üben (30 - 35 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Streifentafel als Anschauungsmittel kennenlernen und ihre Strukturen erkunden

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) UG; c), d) jeweils EA, dann PA, dann UG; e) Aufgabengenerator (PA)

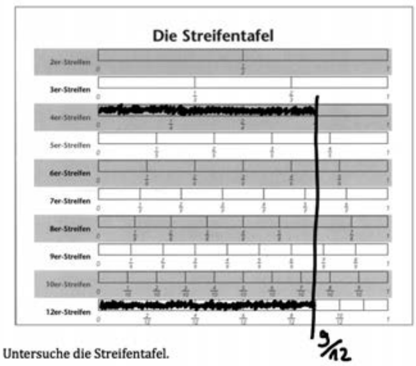
Hintergrund: Einleitender Abschnitt motiviert Einsatz der Streifentafel.

Methode: Große und kleine Streifentafel nutzen: An der kleinen Tafel können Lernende zunächst alleine Muster finden und anschließend gemeinsam an der großen Tafel besprechen / erklären.
Operatives Erarbeiten der Struktur der Streifentafel.

Impuls: Was passiert mit den Anteilen dieser Reihe?
→ Sie werden kleiner. Es werden mehr Stücke im Streifen.

2.1 Muster in der Streifentafel finden und nutzen

Mit Bruchstreifen kann man verschiedene Anteile miteinander vergleichen. Viele Streifen sind in der Streifentafel, die man immer wieder benutzen kann.



a) Untersuche die Streifentafel.
- Welche Streifen sind dort angeordnet und wie?
- Wo findest du $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$?

b) Wie sieht man in der Streifentafel, ob $\frac{3}{4}$ genauso groß ist wie $\frac{9}{12}$?

Typische Schwierigkeit: Zu erkennen, dass 2/6 = 3/9 gilt, fällt einigen Lernenden schwer. Oft gehen sie bestimmte Reihen durch (z.B. „immer Zähler und Nenner verdoppeln: 2/6 = 4/12 = 8/24“ und übersehen dabei andere gleichwertige Anteile wie hier 3/9. Das „Wundern“ über den zusätzlichen Bruch zulassen, Phänomen hier nicht endgültig klären. Es trägt jedoch zu einer Flexibilisierung des Denkens bei.

Zu beachten: Lernende gucken häufig nur von oben nach unten und nicht umgekehrt von unten nach oben in der Streifentafel. Hier gezielt Brüche mit kleinerem Nenner aufgreifen.

c) Finde möglichst viele Anteile in der Streifentafel, die genauso groß sind wie
(1) $\frac{2}{6}$ (2) $\frac{6}{10}$ (3) $\frac{12}{20}$

Schreibe auf: $\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{3}{9}$

Tipp: Achte darauf, dass du auch Anteile mit kleineren Nennern suchst.

Methode: Operatives Durcharbeiten. (3) kann bei stärkeren Lernenden auch übersprungen werden.

d) Suche gleichwertige, also gleich große Anteile in der Streifentafel zu
(1) $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ (3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

e) Nennt euch gegenseitig einen Anteil aus der Streifentafel und findet dazu gleich große Anteile. Wechselt euch ab.

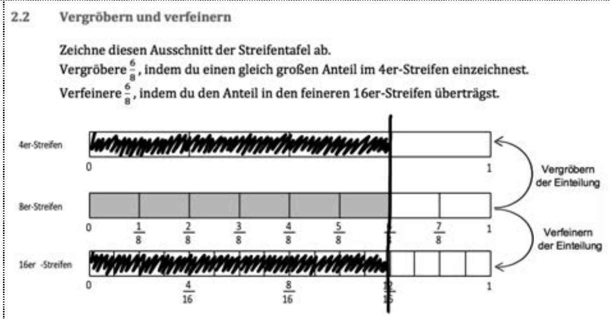
2.2 **Erarbeiten (10 - 15 Minuten)**

Ziel: Begriffe Vergröbern und Verfeinern kennenlernen und mit der Struktur der Streifentafel verknüpfen

Material: -

Umsetzung: UG

Zu beachten: Blick bewusst auf Struktur der Streifen lenken. Fokus auf einen Ausschnitt verdeutlicht strukturelle Zusammenhänge zwischen den Streifen und damit zwischen den Anteilen.
Begriffe *Verfeinern* und *Vergröbern* klären. Vergröbern ist oft schlechter vorstellbar. Vergleich mit Sieb kann helfen: Durch ein gröberes Sieb fallen auch größere Kiesel.
Impuls: Was passiert mit den Achteln im 4er-Streifen? Wie viele Stücke werden immer zusammengefasst? Was passiert im 16er-Streifen? Wie viele Stücke werden da aus einem Achtel? → Aus 2 Achteln wird 1 Viertel / aus 1 Achtel werden 2 16tel.



2.3 **Üben (10 - 15 Minuten)**

Ziel: Struktur im Streifen selbst herstellen beim Vergröbern und Verfeinern durch Abgleich mit der Streifentafel

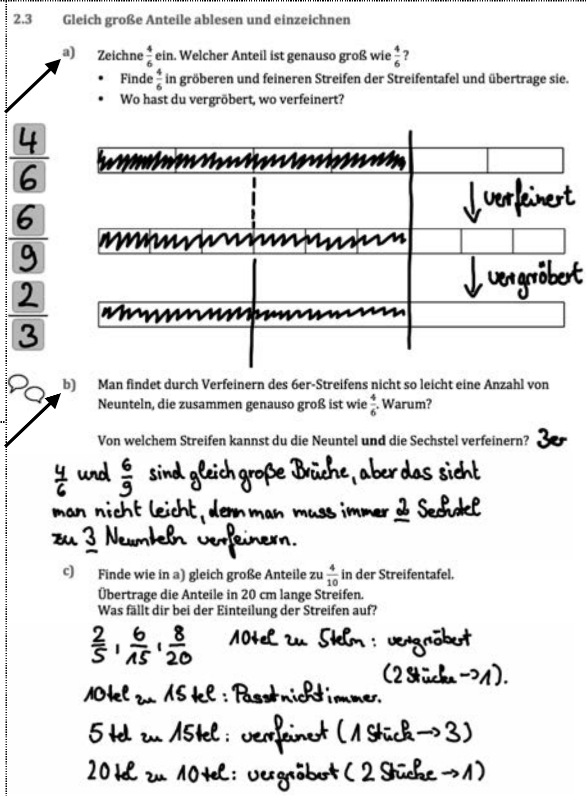
Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA, dann UG; c) EA

Zu beachten: Der Blick nach oben in der Streifentafel fällt z.T. schwer. Begriffe *Verfeinern* und *Vergröbern* festigen und an Streifentafel anbinden: Ihre Struktur gibt Orientierung (nach oben wird in der Tafel vergröbert, nach unten verfeinert).

Methode: Hier auch immer die erweiterten / gekürzten Brüche aufschreiben lassen, nicht nur 4/6. Lernende müssen den ganzen Streifen strukturieren – nicht nur den Teil. Zur Orientierung und Hilfe zur Strukturierung des Streifens zunächst den Endstrich durchziehen wie in der Streifentafel. Streifentafel hilft bei Erarbeitung der Strukturierung.

Hintergrund: Zusammenhang zwischen 4/6 und 6/9 ist für einige Lernende nicht selbstverständlich: Oft finden sie Anteile über Verdopplungsstrategien von Zähler und Nenner. Das Beispiel kann helfen, zu starre Vorstellungen zur Gleichwertigkeit zu vermeiden.



2.4 **Üben (10 - 15 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Strukturen über die Streifentafel hinausgehend herstellen und nutzen

Material: -

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA; c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund: Wiederholt das Strukturieren wie in der Streifentafel.

Hintergrund: Verallgemeinert auf Brüche, die nicht in der Streifentafel vorkommen.

2.4 Wenn die Streifentafel nicht reicht

a) Zeichne einen 20 cm langen Streifen und trage den Anteil $\frac{3}{4}$ ein.
Wie musst du den Streifen verfeinern, damit du den Anteil $\frac{6}{8}$ gut eintragen kannst?
Zeichne ihn in einem neuen Streifen.

b) Wie musst du den Streifen aus a) verfeinern, damit du $\frac{30}{40}$ gut eintragen kannst?

c) Stellt euch gegenseitig Aufgaben zum Anteil mit Bruchstreifen:
Gebt einen Anteil vor und findet gleich große Anteile. Wechselt euch ab.

2.5 **Üben (20 - 25 Minuten)**

Ziel: Systematisierend Gleichwertigkeit in Situationen herstellen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: EA, dann PA, dann UG

Zu beachten: Tabelle kann Lernenden Schwierigkeiten bereiten.
Hilfestellung: Gedankliche Anbindung an Streifentafel: Steht die Zahl für alle Stücke vom Bruchstreifen oder nur für die Stücke vom Teil?
Impuls: Für letzte Zeile hilft Vergleich mit erster Zeile: Sarah bekommt doppelt so viele Stücke, aber denselben Anteil. Wie viele Stücke hat der Riegel dann insgesamt? → 24 (auch doppelt so viele Stücke).
Lösung: Alternativ *Reihen* der Stücke für Teil / Ganzes hoch- / runterzählen: 3, 6, 9, 12 etc.

2.5 Gleich große Anteile in Situationen finden

Der Schokoriegel ist immer gleich groß, aber anders geschnitten.
Die Kinder bekommen alle gleich viel vom Schokoriegel, also denselben Anteil.
Ergänze die Tabelle und überprüfe mit der Streifentafel. Was fällt dir auf?

Kind	So viele Stücke hat der Schokoriegel	Teil, den ein Kind bekommt	Anteil, den ein Kind bekommt
Tara	12	4	$\frac{4}{12}$ (= $\frac{1}{3}$)
Maurice	6	2	$\frac{2}{6}$
Rico	3	1	$\frac{1}{3}$
Dilara	9	3	$\frac{3}{9}$
Jonas	15	5	$\frac{5}{15}$
Sarah	24	8	$\frac{8}{24}$

2.6 **Üben (15 - 20 Minuten)**

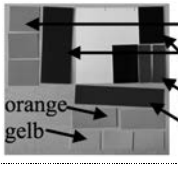
Ziel: Gleichwertige Anteile mit flächigen Anschauungsmitteln bestimmen

Material: MB: Bruchpuzzle

Umsetzung: a) UG; b) PA, dann UG

Zu beachten: Übergang von Streifen zu Puzzle ist nicht trivial. Verfeinern über Auslegen der Fläche.
Impuls: Was hat das mit Verfeinern zu tun? → Durch das Auslegen kann man dieselbe Fläche durch verschiedene Puzzleteile beschreiben.

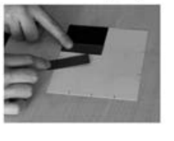
Lösung: So passen die Teile zueinander:



2.6 Anteile und Teile vergleichen

a) Im Bruchpuzzle passt das grüne Stück in das schwarze Stück zweimal hinein.
Das schwarze Stück ist ein Siebtel, das grüne ist ein Vierzehntel, also sind $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

Das gelbe Stück passt dreimal in zwei orangene Stücke.
- Das orangene Stück ist ein Achtel.
  Was ist das gelbe? $\frac{1}{12}$
- Wie kannst du dann $\frac{2}{8}$ anders schreiben?
  $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$



b) Finde mit dem Puzzle weitere Anteile, die man anders schreiben kann.

B2 B Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden – Didaktischer Hintergrund

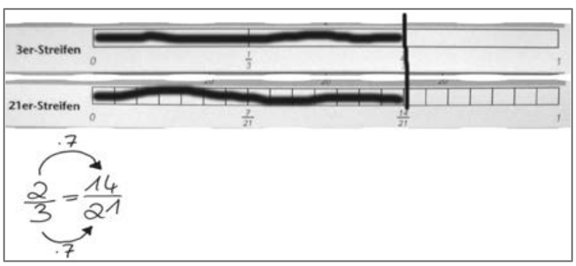
Lerninhalt

Erweitern und Verfeinern, Kürzen und Vergröbern

Die im Baustein **B2 A** aufgebaute inhaltliche Vorstellung der Gleichwertigkeit von Anteilen fokussiert vor allem die Erarbeitung des Verfeinerns und Vergröberns der Einteilung gleich langer Streifen, ohne diese jedoch schon explizit systematisch auf den entsprechenden Kalkül zu beziehen.

Baustein **B2 B** expliziert den Zusammenhang zwischen dem Verfeinern einer Einteilung im Bruchstreifen und dem Erweitern eines formalen Bruchs sowie dem Vergröbern und dem Kürzen und leitet den Übergang im Sinne der angeleiteten fortschreitenden Schematisierung schrittweise an: Beim Verfeinern, etwa von 2/3 zu einem Bruch mit Nenner 21, werden sowohl der Teil als auch das Ganze – gedacht als zwei Stücke im 3er-Streifen – neu strukturiert. Werden im ersten Streifen zwei von insgesamt drei gleich großen Stücken markiert, so stellt sich die Frage, wie viele Stücke von 21 markiert werden müssen, sodass der Anteil erhalten bleibt. Die Anzahl der benötigten Stücke wird dabei *quasikardinal über das Bilden von Einheiten* bestimmt: Beim Übergang vom 3er- zum 21er-Streifen werden aus einem Drittel sieben 21tel, wie man unmittelbar an den Streifen sehen kann. D.h. 1/3 = 7/21. Nutzt man die Einheiten „Drittel“ und „21tel“ so ergibt sich der gleichwertige Bruch zu 2/3 (2 · 1 Drittel) im 21er-Streifen als eben 2 · 7 21tel, d.h. 2/3 = 14/21. Das Kürzen kann analog über das Vergröbern, d.h. Zusammenfassen von Einheiten, erklärt werden.

Bei der Durchführung des Kalküls (Erweitern und Kürzen) kann der stetige Rückgriff auf diese inhaltlichen Vorstellungen helfen, etwa Verwechslungen von Kürzungs- / Erweiterungsfaktor und gekürzter / erweiterter Zahl zu vermeiden (siehe 2.1, 2.4).



Verfeinern und Erweitern zusammen bringen

Beim Übergang vom inhaltlichen Denken (Verfeinern und Vergröbern) zum Kalkül (Erweitern und Kürzen) sehen einige Schüler die Zahlbeziehungen in den reinen Zahlen („Einfach immer das Doppelte von Zähler und Nenner!“). Angelegt wird aber auch, diese Rechenregel in der Streifentafel begründen zu können, denn ohne die vorstellungsbezogene Begründung riskieren die Regeln, beliebig zu werden („Wieso nicht einfach Zähler und Nenner plus 5 nehmen?“).

Sollten sich die inhaltlichen Vorstellungen vom Verfeinern und Vergröbern als noch nicht hinreichend gefestigt zeigen, lohnt der Rückgriff auf Baustein **B2 A**.

Für das Kürzen taucht auch nach sorgfältiger vorstellungsbezogener Herleitung eine zusätzliche Herausforderung auf: Man muss geeignete Zahlen zum Kürzen finden, die in Zähler und Nenner beide als Teiler enthalten sind. Dies fällt gerade schwächeren Lernenden, die nur wenige Zahlbeziehungen auswendig kennen und mit der Primzahlzerlegung nicht vertraut sind, oft schwer. In diesem Baustein werden daher als einfacher Weg zum Finden geeigneter Teiler die Vielfachenreihen angeboten. Dabei ist nicht das Ziel, den vollständig gekürzten Bruch zu bestimmen, sondern sich diesem (auch in mehreren Schritten) anzunähern. Wichtiger als das vollständige Kürzen ist das konzeptionelle Verständnis des Kalküls.

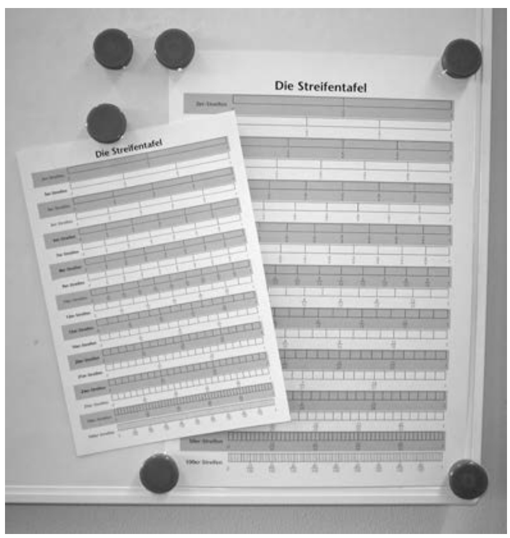
Veranschaulichung und Material

Notations- und Sprechweise

Manche Lernende verknüpfen die Begriffe Erweitern und Kürzen mit ihren alltagssprachlichen Bedeutungen: Beim Erweitern eines Feldes wird es größer, beim Kürzen des Gehalts wird dies kleiner (vgl. Padberg 2009, S. 56). Es ist wichtig, diese Vorstellungen abzugrenzen, denn Erweitern und Kürzen führen ja gerade zu gleich großen Anteilen (siehe auch Baustein **B2 A**).

Anschauungsmittel Bruchstreifen und Streifentafel

Zentrales Anschauungsmittel sind wie bereits in Baustein **B2 A** die Streifentafel und Bruchstreifen, mit deren Hilfe der Kalkül mit den anschaulichen Vorstellungen vom Vergröbern und Verfeinern verknüpft wird.



Die Streifentafeln

Zentrales Ziel des Bausteins ist nun jedoch, gerade die Loslösung von der Streifentafel zu initiieren, damit gleichwertige Brüche auch rein im Kalkül gefunden werden können. So wichtig die inhaltliche Vorstellung ist, so wichtig ist es nun auch, sie nicht immer aktivieren zu müssen.

Dazu dienen langsame Übergänge, zum Beispiel mit Kopfübungen, bei denen die Lernenden die Struktur der Streifentafel im Kopf aktivieren sollen, um die formale Rechnung strukturell begründen zu können.

Aufbau der Förderung

In **Fördereinheit 1 (Gleichwertige Anteile im Kopf finden)** wird zunächst die Gleichwertigkeit von Anteilen in der Streifentafel kurz wiederholt und es werden Vorstellungsübungen zur Ablösung vom Material angeboten, um die Beobachtungen beim Verfeinern und Vergröbern, die in den Streifen gemacht wurden, in den Kalkül zu übertragen.

In **Fördereinheit 2 (Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden)** wird der Kalkül systematisch mit den Streifen verknüpft. Auch später wird der Kalkül immer rückführbar auf die anschaulichen Verfahren.

Den Abschluss bilden Übungen zur Systematisierung und zum Flexibilisieren: So wird etwa die Multiplikation vom Erweitern abgegrenzt. Darüber hinaus können in den letzten Aufgaben Zahlbeziehungen untersucht werden, die aber in voller Flexibilität nicht mehr das Ziel für alle Lernenden darstellen.

Weiterführende Literatur

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 46 - 57.

Prediger, S. (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. In: Praxis der Mathematik in der Schule 48 (11), 8 - 12.

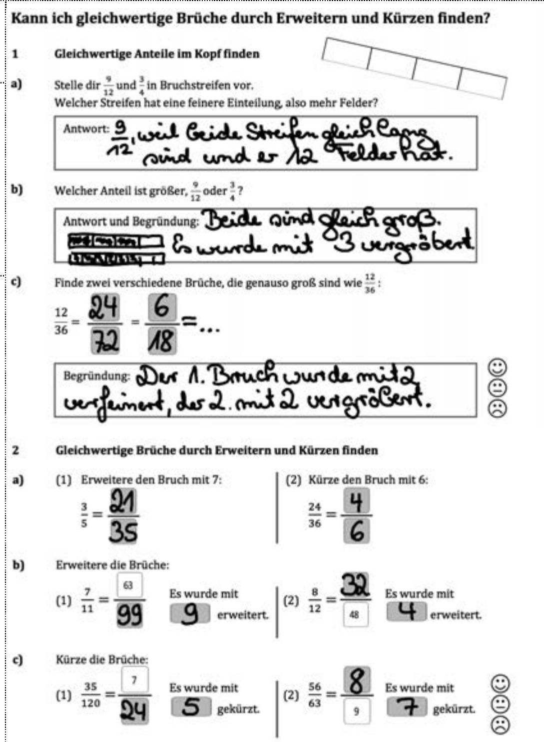
B2 B – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

1 a): Bei Unklarheiten, was die Einteilung von Streifen mit den Brüchen zu tun haben soll, kann auf den abgebildeten Streifen verwiesen werden: Welche Anteile könnte man gut in diesem 4er-Streifen zeigen?

1 c): Manche Lernende sind irritiert, weil mehrere Brüche aufgeschrieben werden sollen. Hier hilft der Hinweis, dass gleich große Anteile geschrieben werden sollen, die nur anders heißen. Als Begründung können Lernende auch angeben, wie sie gerechnet haben.


Kann ich gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden?

1 Gleichwertige Anteile im Kopf finden

a) Stelle dir $\frac{9}{12}$ und $\frac{3}{4}$ in Bruchstreifen vor. Welcher Streifen hat eine feinere Einteilung, also mehr Felder?

Antwort: $\frac{9}{12}$, weil beide Streifen gleich lang sind und er 12 Felder hat.

b) Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$?

Antwort und Begründung: Beide sind gleich groß. Es wurde mit 3 vergröbert.

c) Finde zwei verschiedene Brüche, die genauso groß sind wie $\frac{12}{36}$:

$\frac{12}{36} = \frac{24}{72} = \frac{6}{18} = \ldots$

Begründung: Der 1. Bruch wurde mit 2 verfeinert, der 2. mit 2 vergrößert.

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

a) (1) Erweitere den Bruch mit 7: $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ | (2) Kürze den Bruch mit 6: $\frac{24}{36} = \frac{4}{6}$

b) Erweitere die Brüche:
(1) $\frac{7}{11} = \frac{63}{99}$ Es wurde mit 9 erweitert. | (2) $\frac{8}{12} = \frac{32}{48}$ Es wurde mit 4 erweitert.

c) Kürze die Brüche:
(1) $\frac{35}{120} = \frac{7}{24}$ Es wurde mit 5 gekürzt. | (2) $\frac{56}{63} = \frac{8}{9}$ Es wurde mit 7 gekürzt.

Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1)	Erweitern bedeutet Multiplizieren, Kürzen Dividieren. „$\frac{9}{12}$ weil $\frac{9}{12}$ das dreifache von $\frac{3}{4}$ ist.“	Häufig werden nur Bezeichnungen verwechselt, teilweise ist aber auch Verständnis nicht tragfähig.	Multiplikation und Erweitern abgrenzen (2.3).
	z.B. „$\frac{3}{4}$ ist größer weil 3 von 4 ein kleinerer Abstand ist.“ $\frac{12}{36} = \frac{14}{38} = \frac{16}{40}$	Brüche werden über den Abstand zwischen den Zahlen in Zähler und Nenner verglichen.	Gleichmäßiges Verfeinern bzw. Vergröbern von Teil und Ganzem thematisieren (ggf. Wiederholung in **B2 A** bzw. 1.1 - 1.4). Bedeutung des Erweiterungsfaktors erarbeiten (2.1 - 2.4).
	z.B. $\frac{12}{36} = \frac{6}{72} = \frac{3}{108}$ Kürze die Brüche: (1) $\frac{35}{120} = \frac{7}{600}$ Es wurde mit 5 gekürzt.	Es wird z.B. im Zähler multipliziert und im Nenner dividiert. Mögliche Idee: Mal und geteilt heben sich auf.	
1), 2)	Einmaleins-Fehler	Beim Erweitern und Kürzen wird fehlerhaft meist in Zähler oder Nenner gerechnet.	Keine spezielle Förderung in **B2 B** notwendig. Ggf. üben oder Weg zum Kürzen über Reihen thematisieren (2.2; 2.5 - 2.8).

Diagnoseaufgabe 1: Gleichwertige Anteile im Kopf finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
b)	z.B. Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$? Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ weil 12 ist größer als 4. Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ ist der größere Anteil weil mehr Felder gefärbt werden. Antwort und Begründung: $\frac{3}{4}$ weil ~~98~~ ~~der Nenner jeah 4.~~ je kleiner der Nenner destó größer ~~die Zahl~~ der bruch	Brüche werden nur über den Nenner bzw. nur über den Zähler verglichen. Die Bearbeitung in a) kann hier zum Teil bei der Einschätzung der Lösung helfen.	Gleichmäßiges Verfeinern bzw. Vergröbern von Teil und Ganzem erarbeiten (ggf. Wiederholung in **B2 A** bzw. 1.1 - 1.4).
c)	z.B. $\frac{12}{36} = \frac{9}{40} = \frac{13}{35}$	Die Summe aus Zähler und Nenner wird erhalten.	

Diagnoseaufgabe 2: Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)	z.B. Erweitere die Brüche: (1) $\frac{7}{11} = \frac{63}{67}$ Es wurde mit 56 erweitert. mit 6 kürzen: $\frac{24}{36} = \frac{18}{30}$	Kürzen wird als Subtrahieren, Erweitern als Addieren in Zähler und / oder Nenner interpretiert.	Ggf. gleichmäßiges Verfeinern bzw. Vergröbern von Teil und Ganzem thematisieren (1.1 - 1.4). Bedeutung des Erweiterungsfaktors erarbeiten (2.1 - 2.4).
b), c)	z.B. (2) $\frac{56}{63} = \frac{7}{9}$ Es wurde mit 7 gekürzt.	Die Zahl, mit der gekürzt oder erweitert wurde, wird in den Zähler bzw. Nenner geschrieben.	Unter Umständen Flüchtigkeitsfehler, sonst siehe a).

1 Gleichwertige Anteile im Kopf finden

1.1 Erarbeiten (15 - 20 Minuten)

Ziel: Gleich große Brüche in der Streifentafel identifizieren; Vergröbern und Verfeinern erklären

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Voraussetzung: Erkenntnisse und Begrifflichkeiten aus **B2 A**: Vergröbern bedeutet Blick nach oben in der Tafel mit gröberer Einteilung – Verfeinern nach unten mit feinerer Einteilung. Dabei werden gleich große Anteile durch gleich lange Teile gefunden.

Lösung: Unmöglichkeit, einen gröberen Anteil zu finden, wird hier phänomenologisch betrachtet (Einteilung passt nicht). Argumentation über Kürzbarkeit möglich, aber hier nicht erwartet.

1.1 Die Streifentafel nutzen

a) Markiere $\frac{8}{10}$ in der Streifentafel und finde weitere Anteile, die genauso groß sind:

Welche Anteile findest du, wenn du den Streifen für $\frac{8}{10}$ vergröberst?
Welche Anteile findest du, wenn du den Streifen verfeinerst?
Was passiert beim Vergröbern und Verfeinern mit den Streifen?

b) Finde wie in a) gleich große Anteile zu $\frac{5}{6}$.
Warum findest du für diesen Anteil keinen gröberen Streifen?

1.2 Erarbeiten (30 - 45 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Verinnerlichen der Verfeinerung: Vorstellen des Streifens im Kopf als Grundlage für spätere Begründung der Rechenregel

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b), c), d), e) jeweils UG; f) Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: Aufgabe kann (mit anderen Zahlen) wiederholt z.B. als Einstieg genutzt werden, um inhaltliche Vorstellungen und Kalkül zu verknüpfen. Aufgabe benötigt einige Zeit des Eindenkens.

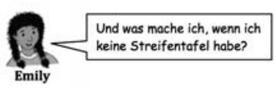
Methode: Aufgaben als gemeinsame Vorstellungsübung moderieren, d.h. Aufgaben diktieren und Lernende bitten, sich alles im Kopf vorzustellen. Hilfestellung: Zunächst mit anschließender direkter Kontrolle (Streifentafel) bearbeiten, um Vertrauen in Teilschritte zu gewinnen. Strukturen der Streifen besprechen. Weitere operative Aufgaben vorbereitend zu e) ergänzen: 2/4, 3/4, 4/4 im Kopf.
Lösung: Im 12er-Streifen sind 12 Zwölftel. 1/4 ist so groß wie 3 Zwölftel. 3/4 ist dann dreimal so viel.

Zu beachten: *Hilfsaufgabe* mit Stammbruch 1/3 im 12er-Streifen anschauen.

Methode: Stärkere Lernende, die operativen Zusammenhang in c) erkannt haben, bearbeiten e) selektiv und in Partnerarbeit. Schwächere Lernende brauchen Explizierung des Nutzens von Einheiten: Jedes Fünftel wird im 15er-Streifen zu 3 Fünfzehnteln.

1.2 Gleich große Anteile durch Verfeinern im Kopf finden

a)



Stell dir $\frac{1}{4}$ markiert im 4er-Streifen vor.

- Stell dir jetzt die Markierung für $\frac{1}{4}$ im feineren 12er-Streifen vor.
- Wie viele Stücke sind damit auf dem 12er-Streifen markiert?
- Wie viele Zwölftel sind also genauso groß wie $\frac{1}{4}$?
- Kontrolliere mit der Streifentafel.

b) Stell dir jetzt $\frac{3}{4}$ vor. Wie viele Stücke sind jetzt auf dem 12er-Streifen markiert?
Wie viele Zwölftel sind also genauso groß wie $\frac{3}{4}$?
Kontrolliere mit der Streifentafel.

c) Vergleiche a) und b): Was bleibt gleich, was ändert sich?

Gleich bleiben die Streifen: Man verfeinert, indem man vom 4er- zum 12er-Streifen geht. Jedes Viertel wird zu 3 Zwölfteln. Man guckt sich nur eine andere Anzahl an: $\frac{1}{4} \to \frac{3}{4}$ und damit $\frac{3}{12} \to \frac{9}{12}$.

d) Stell dir für $\frac{2}{3}$ den gleich großen Anteil im 12er-Streifen im Kopf vor.
Kontrolliere mit der Streifentafel.

e) Stell dir für $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ jeweils den gleich großen Anteil im 10er- und im 15er-Streifen vor. Was stellst du fest? Kontrolliere mit der Streifentafel.

Vom 5er- zum 10er-Streifen verdoppelt sich die Anzahl der Stücke für Teil und Ganzes. Zum 15er-Streifen verdreifacht sie sich.

f) Eine Person sagt einen Anteil, die andere nennt einen dazu passenden feineren Streifen und einen gleich großen Anteil. Kontrolliert immer mit der Streifentafel.

1.3 **Erarbeiten (30 - 45 Minuten)**

Ziel: Verinnerlichung der Vergröberung: Vorstellen des Streifens im Kopf als Grundlage für spätere Begründung der Rechenregel

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

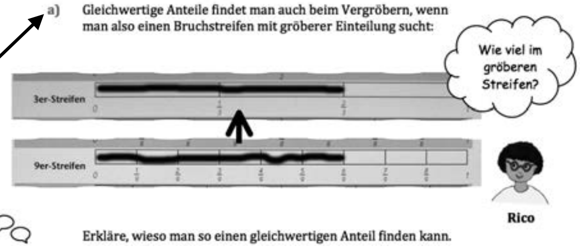
Umsetzung: a), b), c) jeweils UG

Zu beachten: Vergröbern fällt häufig schwerer, da Einheiten zusammengefasst / aufgelöst werden müssen und von größeren zu kleineren Zahlen übergegangen wird (hier: 9 zu 3). Bild hilft, die Vorstellung zu unterstützen und materialungestützte Verinnerlichung in c) (3) anzubahnen. Überprüfung kann auch zusätzlich über vertrautes Verfeinern erfolgen.

Lösung: Man findet so einen gleichwertigen Anteil, weil man Einheiten zusammenfasst zu neuen Einheiten. Der markierte Teil bleibt dabei immer gleich lang.

1.3 Gleich große Anteile durch Vergröbern im Kopf finden

a) Gleichwertige Anteile findet man auch beim Vergröbern, wenn man also einen Bruchstreifen mit gröberer Einteilung sucht:



Erkläre, wieso man so einen gleichwertigen Anteil finden kann.

Methode: Wie 1.2 als Vorstellungsübung moderieren mit Schritt über den Stammbruch 1/8. Ggf. Zwischenschritte an Streifentafel kontrollieren und weitere einfache Aufgaben ergänzen (z.B. 8/12 im 6er-Streifen).

b) Stell dir auch für $\frac{6}{8}$ den gleich großen Anteil im 4er-Streifen im Kopf vor.

Hintergrund: Das Zusammenfassen der Stücke zu neuen Einheiten (16 16tel zu 4 Vierteln, etc.) sollte besprochen werden. (3) löst die Vorstellung von der Tafel vollständig ab, ggf. kann mit selbst gezeichneten Streifen überprüft werden.

Lösung: (1) 4 passt viermal in die 16: 1/4 = 4/16; 3/4 = 18/24, da 6 24tel zusammen so groß wie 1/4 sind. (2) 2/20 = 1/10, also 16/20 = 8/10; 4/20 = 1/5, also 16/20 = 4/5. (3) 4/64 = 1/16, also 48/64 = 12/16.

c) Stell dir auch hier die Anteile im Kopf vor und erkläre:

(1) Warum ist $\frac{12}{16}$ so groß wie $\frac{3}{4}$?
Ist $\frac{18}{24}$ auch so groß wie $\frac{3}{4}$?

(2) Warum ist $\frac{16}{20}$ so groß wie $\frac{8}{10}$?
Ist $\frac{16}{20}$ auch so groß wie $\frac{4}{5}$?

(3) 64tel kann man nicht mehr in der Streifentafel sehen. Sind $\frac{48}{64}$ so groß wie $\frac{12}{16}$?

1.4 **Üben (10 - 20 Minuten)**

Ziel: Verfeinern und Vergröbern im Kopf üben

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann PA; b) EA, dann UG

Zu beachten: Aufgabe variiert 1.2 und 1.3, indem auch mal der Streifen, in dem verfeinert werden muss, zu bestimmen ist.
Hilfestellung: Aus 4 Stücken werden 12 Stücke. Wie wurden diese 4 Stücke verfeinert? Was muss dann mit den 8 Stücken vom Streifen gemacht werden?

1.4 Einteilungen verfeinern und vergröbern im Kopf

a) Ergänze erst ohne Streifentafel so, dass die Anteile gleich groß sind. Schreibe dann als Brüche.

Überprüfe an der Streifentafel.

- Anstatt 4 von 8 sind 12 von **24** Stücken im Streifen markiert.
- Anstatt 6 von 24 sind **2** von 8 Stücken im Streifen markiert.

Was fällt dir auf? Es kommen dieselben Streifen vor.

Lösung: 3, 5; 5, 3; 15, 1; 1, 15: Zweite Zahl muss Teiler von 15 sein, denn Verfeinern geht nicht wegen der 1. Operatives Probieren möglich.

b) Löse wie in a):

- Anstatt **3** von 15 sind 1 von **5** Stücken im Streifen markiert.

Wie gehst du vor? Findest du mehrere Lösungen?

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

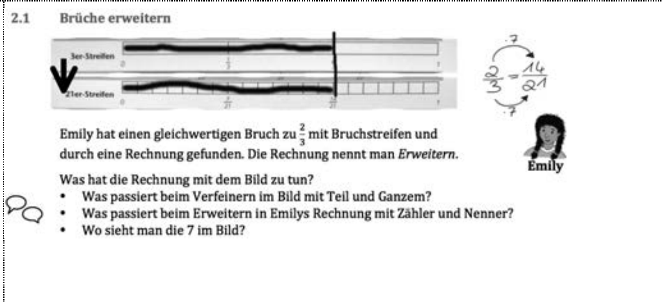
2.1 Erarbeiten (20 - 30 min)

Ziel: Kalkül des Erweiterns mit der Vorstellung vom Verfeinern zusammenbringen

Material: -

Umsetzung: UG

Lösung: Beim Verfeinern werden Teil und Ganzes jeweils feiner aufgeteilt, aber nicht in der Größe verändert: Aus 1/3 werden 7/21. Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit derselben Zahl – hier 7 – multipliziert. Die 7 aus der Rechnung sieht man im Bild in der Art der Einteilung: Mit 7 erweitern bedeutet, jedes Drittel in 7 Stücke teilen, d.h. es werden insgesamt jeweils 7mal so viele Stücke für den Zähler bzw. für den Nenner.



2.2 Üben (15 - 20 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

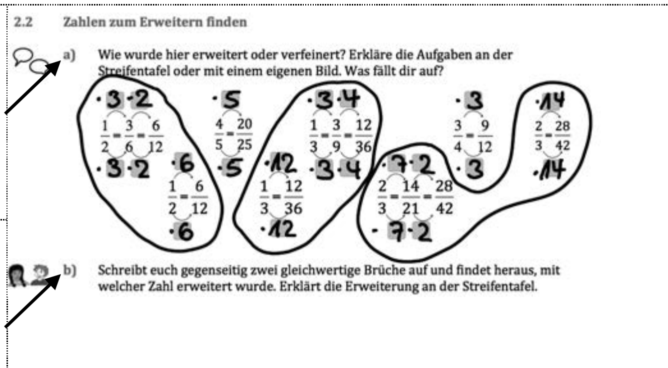
Ziel: Erweitern bzw. Verfeinern üben

Material: MB: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann PA, dann UG; b) Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: Es sollte mit dem Verfeinern der Stücke argumentiert werden.
Lösung: Es gibt Aufgaben, die ohne Zwischenschritt zu demselben Ergebnis führen. Die Zahl zum direkten Erweitern ergibt sich als Produkt aus den Erweiterungsfaktoren der Zwischenschritte.

Zu beachten: Wenn die Zahlen nicht in der Streifentafel darstellbar sind, muss entweder mit eigenen Bildern argumentiert werden, oder über das Verfeinern von Stücken argumentiert werden.



2.3 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

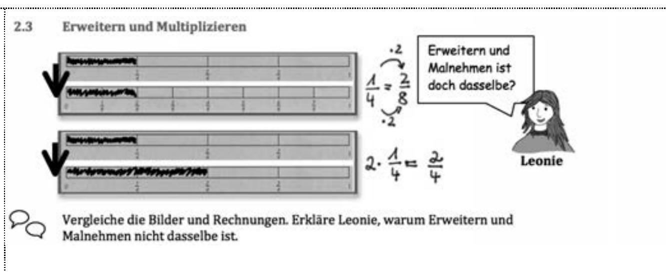
Ziel: Erweitern und Multiplizieren voneinander abgrenzen

Material: -

Umsetzung: UG

Hintergrund: Manche Lernende verwechseln Multiplizieren und Erweitern, weil bei beiden Operationen multipliziert wird.

Lösung: Beim Erweitern wird die Einteilung vom Streifen verändert, nicht aber der gefärbte Teil, d.h. der Anteil. Beim Multiplizieren wird der Teil größer.



2.4 **Erarbeiten (20 - 30 min)**

Ziel: Kalkül des Kürzens mit der Vorstellung vom Vergröbern zusammenbringen

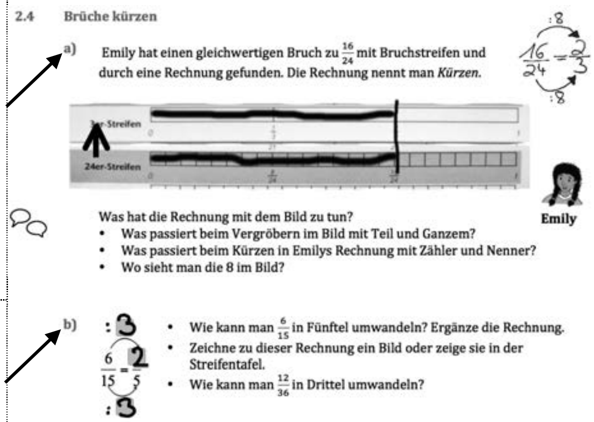
Material: -

Umsetzung: a) UG; b) EA, dann PA

Lösung: Beim Vergröbern werden Teil und Ganzes jeweils gröber aufgeteilt, aber nicht in der Größe verändert: Aus 16/24 werden 2/3. Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl – hier 8 – geteilt. Die 8 aus der Rechnung sieht man im Bild in der Art der Einteilung: Mit 8 kürzen bedeutet, 8/24 zu einem Drittel zusammen zu fassen, d.h. es werden insgesamt jeweils 8mal weniger Stücke für den Zähler bzw. für den Nenner.

Zu beachten: Wichtig ist es, anzusprechen, was bei der Rechnung in den Streifen geschieht. Für 36 als Nenner müssen eigene Bilder gezeichnet werden.

Lösung: 12/36 = 1/3: Der 36 Streifen muss zum 3er-Streifen vergröbert werden, also wird aus 12 Zwölfteln je 1 Drittel – (Abzählen in Dreierschritten: 12, 24, 36).



2.4 Brüche kürzen

a) Emily hat einen gleichwertigen Bruch zu $\frac{16}{24}$ mit Bruchstreifen und durch eine Rechnung gefunden. Die Rechnung nennt man *Kürzen*.

$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ (:8)

3er-Streifen

24er-Streifen

Emily

Was hat die Rechnung mit dem Bild zu tun?

- Was passiert beim Vergröbern im Bild mit Teil und Ganzem?
- Was passiert beim Kürzen in Emilys Rechnung mit Zähler und Nenner?
- Wo sieht man die 8 im Bild?

b) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ (:3)

- Wie kann man $\frac{6}{15}$ in Fünftel umwandeln? Ergänze die Rechnung.
- Zeichne zu dieser Rechnung ein Bild oder zeige sie in der Streifentafel.
- Wie kann man $\frac{12}{36}$ in Drittel umwandeln?

2.5 **Erarbeiten (20 - 30 Minuten)**

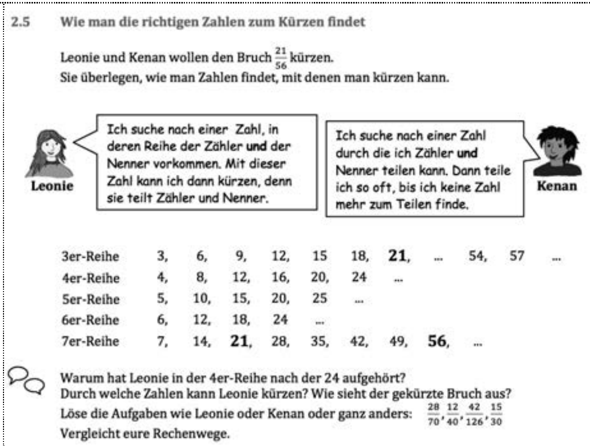
Ziel: Zahlen zum Kürzen über Reihen finden

Material: -

Umsetzung: EA, dann PA, dann UG

Hintergrund: Zahlen, mit denen man kürzen kann, müssen Zähler und Nenner teilen. Hier wird das in Form von Reihen überlegt: Wenn Zähler und Nenner gleichzeitig in einer Reihe vorkommen, sind sie Vielfache von der Ausgangszahl der Reihe, d.h. man kann mit dieser Zahl kürzen. Dabei kann man mit der ersten gefundenen Reihe starten (hier 7). Manchmal gibt es weitere Reihen, bei denen beim Kürzen die Zahlen in Nenner und Zähler noch kleiner und der Bruch überschaubarer wird. Die *optimale* Zahl zum Kürzen zu finden wird hier jedoch nicht angestrebt. Weitere Möglichkeit: Mit dem gekürzten Bruch weiter machen (Hier aber auch nicht Ziel für alle Lernenden).

Lösung: Leonie hat nach der 24 aufgehört, weil schon die 21 nicht in der Reihe vorkam. Dann braucht sie gar nicht mehr zu überprüfen, ob die 56 vorkommt. Leonie kann durch 7 kürzen, weil in dieser Reihe 21 und 56 vorkommen; Bruch: 3/8.
Für die anderen Brüche verschiedene gekürzte Brüche und Vorgehensweisen (siehe Hintergrund) möglich.



2.5 Wie man die richtigen Zahlen zum Kürzen findet

Leonie und Kenan wollen den Bruch $\frac{21}{56}$ kürzen.
Sie überlegen, wie man Zahlen findet, mit denen man kürzen kann.

Leonie: Ich suche nach einer Zahl, in deren Reihe der Zähler **und** der Nenner vorkommen. Mit dieser Zahl kann ich dann kürzen, denn sie teilt Zähler und Nenner.

Kenan: Ich suche nach einer Zahl durch die ich Zähler **und** Nenner teilen kann. Dann teile ich so oft, bis ich keine Zahl mehr zum Teilen finde.

3er-Reihe	3,	6,	9,	12,	15	18,	**21**,	...	54,	57 ...
4er-Reihe	4,	8,	12,	16,	20,	24	...			
5er-Reihe	5,	10,	15,	20,	25	...				
6er-Reihe	6,	12,	18,	24	...					
7er-Reihe	7,	14,	**21**,	28,	35,	42,	49,	**56**,	...	

Warum hat Leonie in der 4er-Reihe nach der 24 aufgehört?
Durch welche Zahlen kann Leonie kürzen? Wie sieht der gekürzte Bruch aus?
Löse die Aufgaben wie Leonie oder Kenan oder ganz anders: $\frac{28}{70}, \frac{12}{40}, \frac{42}{126}, \frac{15}{30}$
Vergleicht eure Rechenwege.

2.6 - 2.7 **Üben (40 - 45 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Erweitern und Kürzen üben und systematisieren

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: 2.6 a), b) jeweils EA, dann PA; 2.6 c) Aufgabengenerator (PA); 2.7 a), b), c), d) jeweils EA, dann UG

Lösung: Bei den ersten beiden und den beiden anderen Brüchen entstehen jeweils gleiche Nenner (man landet in demselben Streifen), obwohl unterschiedlich verfeinert wurde.
Reflexion: Thematisieren, warum oben und unten nicht unterschiedliche Erweiterungsfaktoren vorkommen können → Weil Teil und Ganzes gleich / in demselben Streifen verfeinert werden.

2.6 Erweitern und Kürzen üben

a) Erweitere die Brüche. Was fällt dir auf? Erkläre mit der Streifentafel.

$\frac{8}{11} \overset{\cdot 8}{=} \frac{64}{88}$ $\frac{5}{8} \overset{\cdot 11}{=} \frac{55}{88}$ $\frac{3}{7} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{21}$ $\frac{2}{3} \overset{\cdot 7}{=} \frac{14}{21}$

Lösung: Vom ersten bis zum letzten Bruch kommt man in einem Schritt, wenn man mit dem Produkt aus den einzelnen Faktoren erweitert bzw. kürzt.

b) Erweitere oder kürze. Gib die Zahl an, mit der du gekürzt oder erweitert hast. Wie kommst du vom ersten zum letzten Bruch in einem Schritt?

$\frac{18}{27} \overset{:3}{=} \frac{6}{9} \overset{:3}{=} \frac{2}{3}$ $\frac{60}{80} \overset{:4}{=} \frac{15}{20} \overset{:5}{=} \frac{3}{4}$ $\frac{28}{56} \overset{:4}{=} \frac{7}{14} \overset{:7}{=} \frac{1}{2}$ $\frac{3}{7} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{21} \overset{\cdot 3}{=} \frac{27}{63}$ $\frac{12}{25} \overset{\cdot 4}{=} \frac{48}{100} \overset{\cdot 3}{=} \frac{144}{300}$ $\frac{9}{11} \overset{\cdot 7}{=} \frac{63}{77} \overset{\cdot 2}{=} \frac{126}{154}$

Zu beachten: Beim Kürzen muss Teilbarkeit beachtet werden.

c) Eine Person nennt einen Bruch und eine Zahl, mit der Zähler und Nenner erweitert werden sollen, die andere löst die Aufgabe. Wechselt euch ab.

Lösung: 3/8 zu 6/16 ist mit 2 erweitert, 6/16 zu 12/32 ist auch mit 2 erweitert, d.h. die Brüche sind alle gleichwertig. Mit 4 erweitert kommt man von 3/8 zu 12/32. Weitere erweiterte Brüche stimmen ebenfalls überein.

2.7 Mit Erweitern und Kürzen experimentieren

a) Erweitere jeden Bruch nacheinander mit 2, 4 und 6: $\frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{12}{32}$. Was stellst du fest?

Hintergrund: Zahlbeziehungen werden reflektiert.
Lösung: b) (1) Zähler / Nenner Vielfache von 4. (2) Vielfache von 12. (3) teilbar durch 4, 12, 20, ... aber nicht Vielfache von 8. In c) gibt es keinen Bruch, denn 2 · 5 = 10.

b)
- Gib drei Brüche an, die man mit 4 kürzen kann.
- Gib drei Brüche an, die man mit 4 und 3 kürzen kann.
- Gib drei Brüche an, die man mit 4 aber nicht mit 8 kürzen kann.

c) Gibt es einen Bruch, den man mit 10 aber nicht mit 2 und 5 kürzen kann? Warum (nicht)?

Zu beachten: Verschiedene Lösungen möglich.

d) Welche Zahlen können in den Kästchen stehen? Suche möglichst viele Lösungen.

z.B. $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$ $\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$ $\frac{30}{36} = \frac{45}{18}$

2.8 **Üben (5 - 10 min)**

Ziel: Typische Fehlvorstellung widerlegen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: EA, dann UG

Hintergrund: Manche Lernende vergleichen Anteile, indem sie auf die Anzahl der Stücke in einem Bruchstreifen schauen: Wenn zwischen der Zahl im Zähler (d.h. Teil) und der im Nenner (d.h. Ganzes) derselbe Abstand liegt, schätzen sie die Anteile als gleich groß ein.
Lösung: Jonas darf nicht nur auf die Anzahl der Stücke (4 und 6 bzw. 7 und 9) gucken, sondern er muss die beiden Teile in den jeweils gleich langen Streifen vergleichen. Dann sieht er, dass der Streifen zu 7/9 länger, der Anteil also größer ist.

2.8 Falsch verfeinert

Jonas hat einen gleichwertigen Bruch zu $\frac{4}{6}$ mit dem Nenner 9 gesucht.

$\frac{4}{6} = \frac{7}{9}$, denn von 6 bis 9 ist 3. Und 4 + 3 = 7.

Erkläre mit der Steifentafel, warum Jonas Rechenweg falsch ist.
Wie muss Jonas richtig verfeinern?

B2 C Brüche und Prozente ineinander umwandeln – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Brüche und Prozente sollten im Rahmen eines Brüchecurriculums nicht isoliert gelernt, sondern vielmehr als zwei Schreibweisen für Anteile verstanden werden.

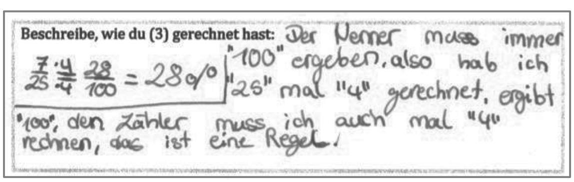
Brüche in Prozente erweitern

Dieser Förderbaustein knüpft an die in Baustein **B1 B** eingeführte *Von-Hundert-Vorstellung* von Prozenten sowie an die in den Bausteinen **B2 A** und **B2 B** erarbeitete Vorstellung der Gleichwertigkeit von Brüchen an. Dabei wird das Umwandeln von Brüchen in Prozente ineinander, das in Baustein **B1 B** auf einer rein anschaulichen Ebene eingeführt wurde, hier systematischer gefasst und auf kompliziertere Brüche ausgeweitet: Anteile und Prozente werden nicht mehr ausschließlich durch das direkte Vergleichen im Bruchstreifen ineinander überführt, sondern – wie in den Bausteinen **B2 A** und **B2 B** für Anteile in Bruchschreibweise bereits erarbeitet – nun zunehmend durch Erweitern und Kürzen ineinander umgewandelt. Dabei kommen neben den bisher ausschließlich betrachteten Nennern 100 und 10 auch andere Nenner, die Teiler von 100 sind, vor. Das Erweitern der Brüche auf den Nenner 100 bereitet auch schon das in Baustein **B3 A** zu erarbeitende Gleichnamigmachen vor. Brüche, deren Nenner keine Teiler von 100 sind, die sich jedoch über den Umweg über das Kürzen dennoch in einen Hundertstelbruch umformen lassen, werden nur ausblickartig thematisiert.

Die Motivation für diese Einheit, also die Tatsache, dass Prozente nur andere Schreibweisen für Brüche und dazu noch besonders leicht vergleichbar sind, wird in Baustein **B3 B** (Ordnen) aufgegriffen.

Hürden beim Umwandeln von Brüchen und Prozenten

Da der Baustein selbst auf verschiedene Konzepte der Bruchrechnung – Anteilsvorstellung, Erweitern, Kürzen – zurückgreift, zeigen sich hier oft komplexere Schwierigkeiten von Lernenden. Wichtig sind daher eine sorgfältige Diagnose der Ausgangsvoraussetzungen der Lernenden und eine anschauliche Erarbeitung der Gleichwertigkeit. Damit soll verhindert werden, dass Lernende Gleichwertigkeit als auswendig gelernte, aber nicht inhaltlich durchdrungene Rechenregel nutzen, wie in diesem Beispiel angedeutet:



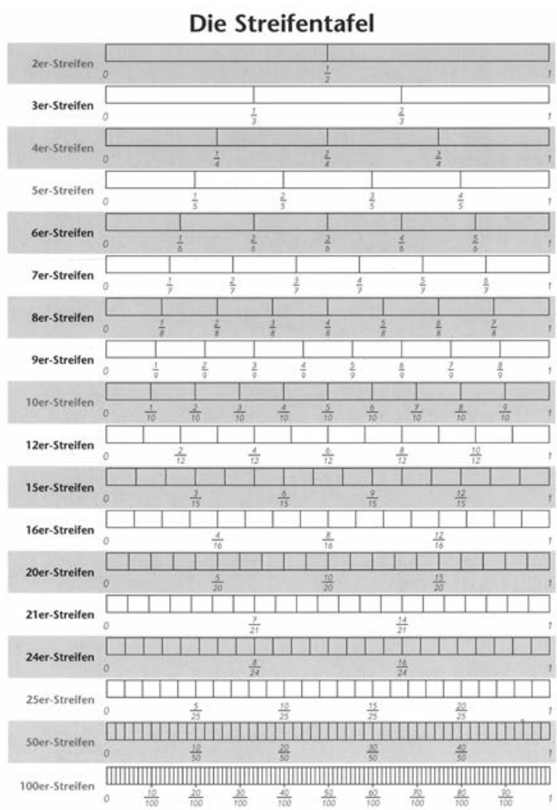
Schülerdokument zum Umwandeln von Brüchen in Prozente

Dabei ist ein gefestigter Anteilsbegriff eine notwendige Voraussetzung, die in verschiedenen Repräsentationen abgerufen und mit der Prozentvorstellung verknüpft wird.

Veranschaulichung und Material

Streifentafel

Die Streifentafel, deren Struktur in Baustein **B2 A** bereits erarbeitet und beschrieben wurde, wird in dieser Einheit genutzt, um Prozente als Brüche mit Nenner 100 zunächst zu lokalisieren, schließlich über das Ausnutzen der Gleichwertigkeit in andere Bruchschreibweisen zu überführen und dem Kalkül einen inhaltlichen Anker zu geben. Der Fokus liegt damit, anders als in Baustein **B2 A**, auf dem jeweils gleichwertigen Anteil im letzten Streifen – dem 100er-Streifen. Dieser ermöglicht eine direkte Umwandlung in Prozente.



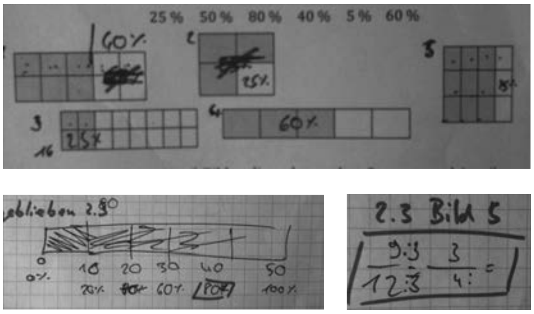
Die Streifentafel

Besonders relevant sind die mit grauer Beschriftung versehenen Streifen der Tafel: Diese stellen die Teiler von 100 dar; jeder Anteil, der sich in diesen Streifen darstellen lässt, kann auch als Hundertstelbruch und damit auch als Prozent mit ganzzahliger Prozentzahl geschrieben werden.

Flächige Anschauungsmittel

Neben der eher linearen Darstellung von Prozenten in Bruchstreifen werden zur Flexibilisierung der Vorstellungen und zur Verknüpfung mit der Anteilsvorstellung auch flächige Anschauungsmittel eingesetzt.

Die Schwierigkeit besteht dabei für Lernende z.T. darin, dass sie das anders strukturierte Ganze mit der 100 im Nenner des Hundertstelbruchs verknüpfen müssen: „Was haben die 4 von 16 Kästchen mit Prozenten zu tun?“ Hier müssen die Konzepte des Verfeinerns und des Vergröberns, die an den Streifen erarbeitet wurden, ggf. noch einmal thematisiert werden.



Schülerdokumente zum Umwandeln von Brüchen in Prozente mithilfe von flächigen Anschauungsmitteln

Aufbau der Förderung

Die Förderung gliedert sich in zwei Teile. In **Fördereinheit 1 (Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln)** wird das Erweitern von Brüchen auf den Nenner 100 als notwendiger Schritt beim Umwandeln von Brüchen in Prozente an der Streifentafel inhaltlich erarbeitet. Die Strukturierung, die beim bildlichen Bestimmen des Anteils im 100er-Streifen genutzt wird, wird im Anschluss auf den Kalkül übertragen und gibt diesem damit – analog zu Baustein **B2 A** bzw. **B2 B** – Sinn. Der Ausblick auf Brüche, deren Nenner keine Teiler von 100 sind, die aber dennoch durch vorheriges Kürzen auf 100 erweiterbar sind (z.B. 2/8 = 1/4 = 25/100), dient ebenfalls dazu, den Blick von der Tafel zu erweitern und das für Lernende zum Teil schwerer verstehbare Kürzen erneut in einem weiteren Problemfeld anzusprechen.

Fördereinheit 2 (Brüche und Prozente umwandeln) vollzieht den bereits inhaltlich in Baustein **B1 B** für einfache Nenner vollzogenen Schritt vom Bruch mit Nenner 100 zur Prozentzahl. Hier wird nach einer Erarbeitung dieses Zusammenhangs operativ in verschiedenen Darstellungen und in beide Richtungen des Umwandelns geübt. Dabei wird auch die Gleichwertigkeit noch einmal in einer etwas anderen Perspektive aufgegriffen, indem thematisiert wird, dass verschiedene Brüche zu derselben Prozentzahl gehören können.

Zum Abschluss wird das Verinnerlichen zentraler Prozentzahlen und ihrer Repräsentationen im Rahmen eines „Paare finden“-Spiels in grafischer und verbaler Form angeregt.

Weiterführende Literatur

Baireuther, P. (1983): Die Grundvorstellungen der Prozentrechnung. In: Mathematische Unterrichtspraxis 4(2), 25 - 34.

Hafner, T. (2012): Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen. Berlin: Vieweg + Teubner, 37 - 42.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 27ff.

B2 C – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

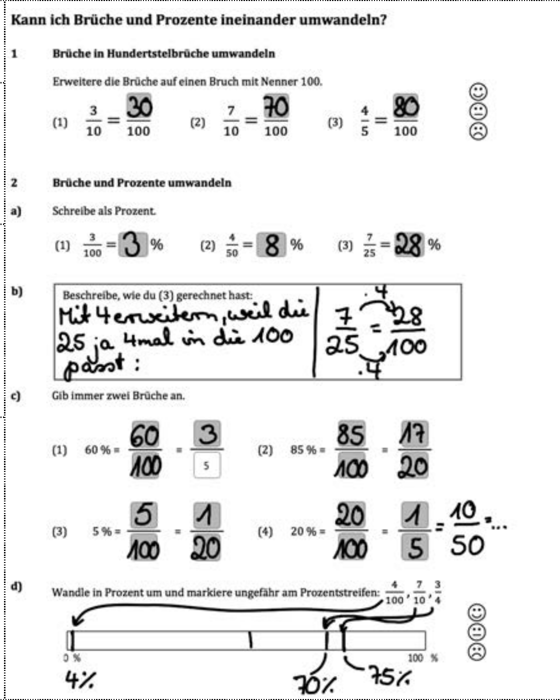
Dauer: 20 - 30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Lernende dazu auffordern, ihren Lösungsweg in 2 b) aufzuschreiben.

2 c): Darauf hinweisen, dass jeweils zwei verschiedene Brüche gefunden werden sollen. Hier hilft der Hinweis, dass diese gleich groß sein sollen.
2 c): (4) muss nicht zwingend der vollständig gekürzte Bruch 1/5 gefunden werden.

Bei 2 d) kommt es nicht auf exaktes Zeichnen an.


Kann ich Brüche und Prozente ineinander umwandeln?

1 Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln

Erweitere die Brüche auf einen Bruch mit Nenner 100.

(1) $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ (2) $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ (3) $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$

2 Brüche und Prozente umwandeln

a) Schreibe als Prozent.

(1) $\frac{3}{100}$ = 3 % (2) $\frac{4}{50}$ = 8 % (3) $\frac{7}{25}$ = 28 %

b) Beschreibe, wie du (3) gerechnet hast:

Mit 4 erweitern, weil die 25 ja 4mal in die 100 passt: $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$ ·4

c) Gib immer zwei Brüche an.

(1) 60 % = $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ (2) 85 % = $\frac{85}{100} = \frac{17}{20}$

(3) 5 % = $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ (4) 20 % = $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} = \frac{10}{50}$ ...

d) Wandle in Prozent um und markiere ungefähr am Prozentstreifen: $\frac{4}{100}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}$

0 % 100 %

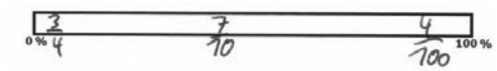
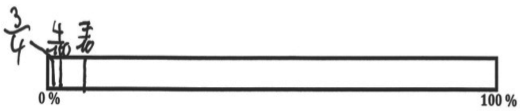
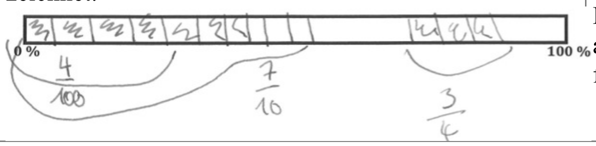
4% 70% 75%

Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
z.B. $\frac{4}{5} = \frac{20}{100}$	Erweiterungsfaktor wird in Zähler übernommen ($5 \cdot 20 = 100$, also 20/100) oder Zähler wird durch Multiplikation von Zähler und Nenner erhalten ($4 \cdot 5 = 20$).	Ggf. **B1 B** zum Wiedererarbeiten einfacher Zehntel und Hundertstelbrüche. Erarbeiten des Erweiterns auf 100 in der Streifentafel und im Kalkül (1.1 - 1.2). Erarbeiten des Erweiterns auf spezielle Brüche (1.3).
z.B. $\frac{4}{5} = \frac{40}{100}$ oder $\frac{7}{25}$ = 70 %	Der Zähler – auch von Brüchen mit Nenner ≠ 10 – wird, um einen Hundertstelbruch bzw. eine Prozentzahl zu erhalten, mit 10 multipliziert.	
z.B. $\frac{3}{100}$ = 30 %	Unsicherheiten bei den Stellenwerten.	Ggf. **B1 B** zum Erarbeiten einfacher Zehntel- und Hundertstelbrüche. Erarbeiten des Erweiterns von Brüchen auf Hundertstelbrüche (2.1). Ein Gefühl für die Größenordnung von Prozenten entwickeln (2.3). Wichtige Prozentzahlen und ihre Darstellungen systematisieren (2.8).
z.B. $\frac{4}{50}$ = 0,8 % oder $\frac{3}{100}$ = 0,03 %	Brüche werden korrekt in Dezimalzahlen umgewandelt. Diese werden aber einfach vor dem Prozentzeichen notiert.	
z.B. $\frac{4}{50}$ = 4,5 % oder $\frac{7}{25}$ = 7,25 %	*Bruchstrich-trennt*: Der Bruchstrich wird als Komma interpretiert.	Erarbeiten der Bedeutung von Prozenten in **B1 B**.
z.B. $\frac{3}{100}$ = 3 % oder $\frac{4}{50}$ = 4 %	Der Zähler des Anteils wird als Prozentzahl übernommen.	

Diagnoseaufgabe 2: Brüche und Prozente umwandeln

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
c)	Es werden nur Hundertstelbrüche, aber keine weiteren gekürzten Brüche angegeben.	Prozente werden u.U. auf den Nenner 100 eingeschränkt interpretiert bzw. das Kürzen wird nicht (sicher) beherrscht.	Erarbeiten verschiedener Schreibweisen für Prozente (gleichwertige Brüche; 2.2). Üben und Flexibilisieren (2.4; 2.6 - 2.7). Ggf. Kürzen thematisieren (**B2 B**).
	Es wird falsch gekürzt.	Es bestehen u.U. Unsicherheiten beim Erweitern und Kürzen.	Ggf. Kürzen und Erweitern erarbeiten in **B2 B**. Flexibilisieren im Umgang mit verschiedenen Schreibweisen von Prozenten (2.4 - 2.6).
d)	Es werden nur Brüche eingezeichnet.	Evtl. wird der Auftrag überlesen oder es bestehen Schwierigkeiten beim Umwandeln von Brüchen in Prozente.	Noch einmal gezielt nachfragen; bei Bedarf das Umwandeln erarbeiten (2.1).
	Brüche werden nach Größe des Nenners geordnet. 	Anteile werden als zwei voneinander getrennte natürliche Zahlen gedeutet.	Anteilsbegriff erarbeiten in **B1 A**.
	Brüche werden nach Größe des Zählers geordnet. 		
	Richtige Reihenfolge, aber Relationen stimmen nicht (z.B. 4/100 sehr mittig).	Gefühl für Größenordnung der Anteile fehlt noch.	Üben mit verschiedenen Darstellungen von Prozenten (2.1; 2.3; 2.8).
	Brüche werden alle nebeneinander als Anteile eingezeichnet. 	Evtl. wird der Streifen als Darstellungsmittel falsch gedeutet.	

1 Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln

1.1 **Erarbeiten (15 - 20 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Hundertstelbrüche als besondere gleich große Brüche in der Streifentafel finden

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) EA, dann PA; c) Aufgabengenerator (PA)

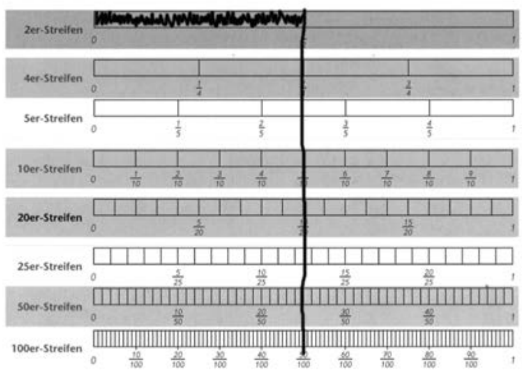
Hintergrund: Hundertstelbrüche werden als Zwischenschritt vor der Bestimmung von Prozenten eingeführt, da sie direkt in der Streifentafel abgelesen werden können. Das Finden gleich großer Brüche im 100er-Bruchstreifen stellt dabei eine besondere Fokussierung des Suchens gleich großer Brüche aus **B2 A** dar.

Zu beachten: Die hier abgebildeten und relevanten Streifen findet man in der Streifentafel schnell über die Markierung in Form von grauer Schrift am Rand wieder. In der großen Streifentafel können Hundertstelbrüche leichter abgelesen werden. Dieser wichtige empirische Zugang sollte im Verlauf der Fördereinheit bzw. des Bausteins zunehmend durch die Verinnerlichung der relevanten Strukturen verlassen werden.

1.1 Hundertstelbrüche in der Streifentafel finden

Emily will den Bruch $\frac{1}{2}$ in Prozent umwandeln.

Sie weiß, dass Prozente Hundertstelbrüche sind und sucht deshalb im 100er-Streifen der Streifentafel. Hier siehst du einen Ausschnitt der Streifentafel:



a) Beschreibe, was Emily macht.
- Wie kann man $\frac{1}{2}$ als Hundertstel schreiben? Wie viel Prozent ist das?
- Welche Anteile sind genauso groß? Finde gleichwertige Anteile, also gleich große Anteile zu $\frac{1}{2}$ in der Streifentafel.

Emily markiert gleich große Anteile, d.h. gleich lange Stücke. $\frac{50}{100} = 50\%$. Gleich große Anteile enden in der Streifentafel auf einer Linie.

Hintergrund:
(1) stellt eine operative Variation dar, die den Blick auf die Struktur zwischen verschiedenen Streifen („Ein Stück im 5er-Streifen entspricht x Stücke im 100er-Streifen.“) lenken soll.
In (2) sollte der Fokus auf das Entdecken der Strukturen gelenkt werden: Die drei Brüche stehen alle auf derselben Linie in der Tafel, da sie gleichwertig sind.

b) Finde wie Emily gleichwertige Brüche mit Nenner 100 mit der Streifentafel.
Welche Muster kannst du erkennen?
(1) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ (2) $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{10}{25}$

Zu beachten: Hier kann es passieren, dass Lernende schon Brüche wie 1/8 auswählen, die nicht erweiterbar sind. Diese sollten zunächst zurückgestellt und in 1.3 besprochen werden.

c) Stellt euch gegenseitig Umwandlungsaufgaben zwischen Hundertsteln und anderen Anteilen. Eine Person nennt einen Bruch.
- Die andere Person verfeinert den Bruch zuerst in Hundertstel.
- Dann verfeinert oder vergröbert sie ihn in andere gleichwertige Anteile.

Wechselt euch ab. Kontrolliert mit der Streifentafel.

1.2 **Erarbeiten (10 - 15 Minuten)**

Ziel: Hundertstelbrüche als besondere gleich große Brüche durch Erweitern finden

Material: MB: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) EA, dann PA

Zu beachten: Hier sollte an die Begrifflichkeiten aus **B2 A** und **B2 B** (verfeinern, vergröbern, erweitern, kürzen) angeknüpft werden.

Impuls: Wie nennt man das Verfahren, das Jonas nutzt? Verfeinert oder vergröbert er? Was passiert mit den zugehörigen Streifen in der Streifentafel?

Zu beachten: Stärkere Lernende können diese Aufgabe nur kurz bearbeiten bzw. ggf. auch überspringen.

1.2 Brüche mit Nenner 100 durch Erweitern finden

Jonas will den Anteil $\frac{1}{4}$ als Bruch mit Nenner 100 schreiben.
Er macht das so:

$\frac{1}{4} \underset{\cdot 25}{\overset{\cdot 25}{=}} \frac{\square}{100}$ also $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

Jonas

a) Beschreibe Jonas´ Rechenweg.

Jonas guckt, wie oft die 4 in die 100 passt
→ 25 mal. Dann verfeinert er mit 25.

b) Wandle die Anteile wie Jonas in Brüche mit dem Nenner 100 um.
Was fällt dir auf?

(1) $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}$ (2) $\frac{3}{4}, \frac{15}{20}$

1.3 **Erarbeiten (15 - 20 Minuten)**

Ziel: Muster erkennen und den Zusammenhang zwischen Teilbarkeit und Hundertstelbrüchen reflektieren

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c) UG; d) PA, dann UG

Typische Schwierigkeit: Der Zugriff über die Streifentafel bleibt mit gewisser Unsicherheit behaftet, manche Lernende finden dadurch, dass man sehr genau ablesen muss, manchmal vermeintlich doch einen gleichwertigen Hundertstelbruch zu 1/8.
Zu beachten: Diese Grenze des empirischen Zugriffs sollte durch Jonas Rechenweg in 1.2 überwunden werden. Dieser kann selbst wieder inhaltlich über die Verfeinerung des Streifens erklärt werden.

Zu beachten: Teils finden Lernende auch Anteile, deren Nenner zwar nicht ohne Rest in die 100 passt, die aber durch Kürzen und anschließendes Erweitern doch in einen Hundertstelbruch überführt werden können. Diese Anteile zunächst unkommentiert lassen und für d) zurückstellen.

Zu beachten: Sarahs Bruch lässt sich erst kürzen und dann auf 100 erweitern. Den Lernenden sollte im Streifen plausibel gemacht werden, dass zwei Achtel genauso viel sind wie ein Viertel, was wiederum im 100er- Streifen darstellbar ist.

Zu beachten: Hier die evtl. zurückgestellten Brüche aus 1.1 c) und 1.3 b) aufgreifen.

1.3 Anteile, für die man keinen Bruch mit Nenner 100 findet

a) Kenan wundert sich:

Komisch:
$\frac{1}{8}$ kann man ja gar nicht einfach mit 100 im Nenner schreiben?
Woran liegt das?

Kenan

Hilf Kenan: Erkläre, warum man $\frac{1}{8}$ nicht als Bruch mit Nenner 100 angeben kann.

(1) Erkläre mit der Streifentafel.

(2) Erkläre mit Jonas´ Rechenweg.

(1) Man findet keinen Anteil auf der Linie.
(2) 8 passt nicht in die 100. Man kann $\frac{1}{8}$ nicht in einen Bruch mit Nenner 100 umwandeln.

b) Finde weitere Anteile, die man nicht als Brüche mit Nenner 100 schreiben kann.

c) Sarah hat eine Entdeckung gemacht:

Aber $\frac{2}{8}$ kann man als Bruch mit Nenner 100 schreiben.

Sarah

Überprüfe Sarahs Entdeckung:
Wie kann man $\frac{2}{8}$ in einen Bruch mit Nenner 100 umwandeln?
Was ist hier anders als in a)? Überprüfe mit der Streifentafel.

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (Kürzen) und die 4 teilt die 100.

d) Tauscht eure Anteile zu b) aus:
Sind Brüche dabei, die man wie Sarah doch als Brüche mit Nenner 100 schreiben kann? Überprüft mit der Streifentafel.

2 Brüche und Prozente umwandeln

2.1 Erarbeiten (30 - 35 Minuten)

Ziel: Hundertstelbruchschreibweise mit Prozenten verknüpfen; das Erweitern als Verfahren etablieren

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) PA, dann UG; c), d) jeweils EA, dann UG

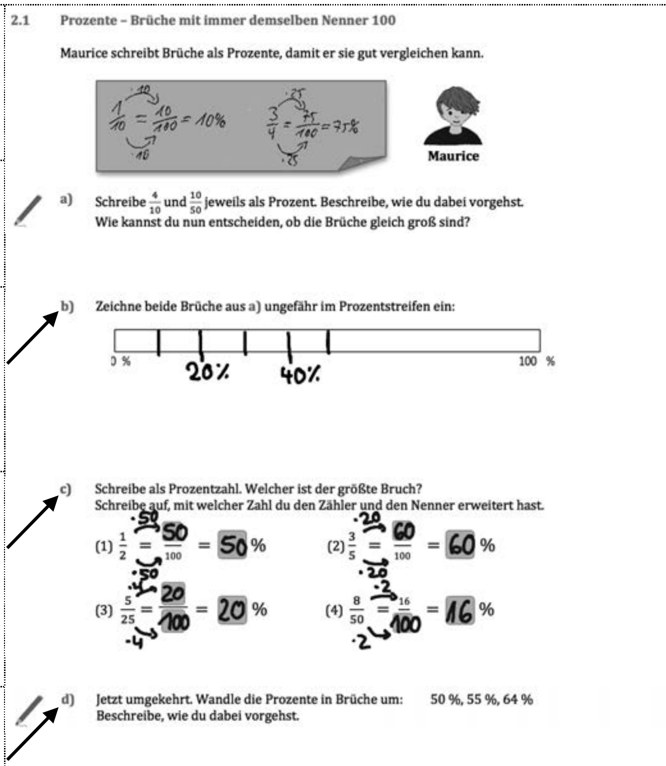
Hintergrund: Motivation für Prozentschreibweise ist, dass sie gut zum Ordnen von Brüchen ist. Hier werden Brüche nur informell als Hundertstelbrüche / Prozente geordnet.

Lösung: Bruch auf Hundertstel erweitern, dann gibt der Zähler die Prozentzahl an. Prozente lassen sich – wie natürliche Zahlen – gut vergleichen.

Zu beachten: Lernende wollen Anteile oft millimeter-genau eintragen. Dafür sensibilisieren, Prozente nur ungefähr einzuzeichnen und sich an anderen Größen wie 50 % zu orientieren (d.h. relative Zahlbezüge anschauen).

Zu beachten: Erweiterungsfaktor für Zähler und Nenner aufschreiben lassen, damit Erweitern und Multiplizieren nicht verwechselt werden.
Impuls: Kann es sein, dass man Zähler und Nenner mit verschiedenen Zahlen vervielfacht? → Nicht möglich: Teil und Ganzes werden gleich verfeinert.

Impuls: Zuerst aus der Prozentzahl einen Hundertstelbruch machen, dann kürzen.
Zu beachten: Kürzen muss von schwächeren Lernenden nicht mit der *besten* Zahl vorgenommen werden. Wichtiger ist, zu thematisieren, dass es noch weitere Schreibweisen gibt.



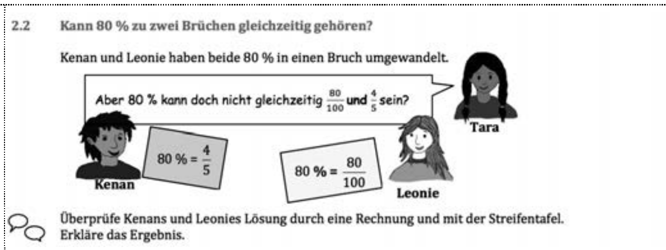
2.2 Üben (5 - 10 Minuten)

Ziel: Verschiedene Schreibweisen für Prozente erklären

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: PA

Hintergrund: Gleichwertigkeit wird hier für Prozente explizit gemacht. Phänomenologisches Überzeugen an der Streifentafel und strukturelle Erklärung an der Rechnung bzw. Verknüpfen der Rechnung mit der Struktur der Streifentafel: 80 % kann man direkt als 80/100 aufschreiben, da „pro Cent" „von Hundert" bedeutet. Gleichheit der beiden Brüche ergibt sich, da 1/5 so groß ist wie 20/100. Also sind 4/5 so groß wie 80/100.



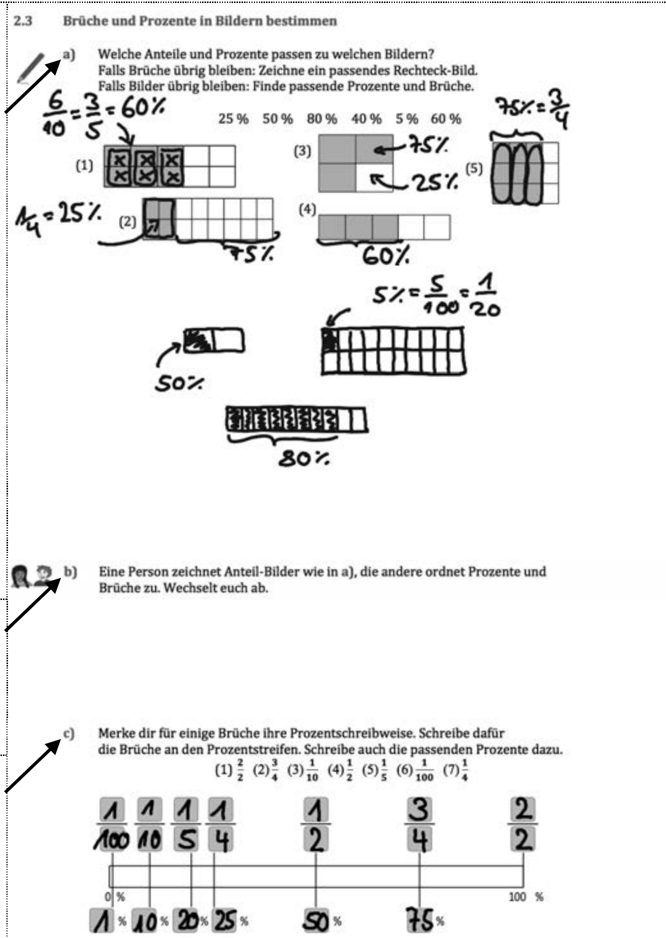
2.3	**Üben (25 - 45 Minuten)**
Ziel:	Darstellungswechsel vornehmen und Prozente mit der Anteilsvorstellung verknüpfen
Material:	MB: Ggf. Streifentafel, ggf. Folienstifte
Umsetzung:	a) UG, dann PA, dann UG; b) PA; c) EA, dann PA, evtl. UG

Zu beachten: Lernende können aushandeln, ob sie auf die dunklen oder die hellen Flächen schauen wollen.
Hilfestellung: Das Finden der Prozente fällt leichter, wenn zunächst in Anteilen gedacht wird. Erst den Bruch aufschreiben und dann umwandeln.

Hintergrund: Es lassen sich viele Konzepte wiederholend thematisieren: Lernende versuchen z.T. Anteile durch Hochrechnen der Kästchenanzahl auf 100 zu bestimmen (z.B. „5 Kästchen passen 20mal in die 100, deswegen ist ein Kästchen 20 %“). Sie scheitern dann aber z.B. an den 12 Kästchen im rechten Bild. Hier muss neu strukturiert werden durch das Bilden neuer Einheiten: Eine Reihe mit 3 Kästchen entspricht 1/4 der Gesamtfläche. D.h. Aspekte des Anteils von Mengen (1/4 von 12) und des Kürzens (Vergröbern der Einteilung) kommen hier zum Tragen.

Zu beachten: Selbstdifferenzierend über Komplexität der Bilder. Darauf achten, dass Bilder lösbar sind bzw. unlösbare thematisieren. Andere Darstellungen (z.B. Kreise) können Schwierigkeiten bereiten.

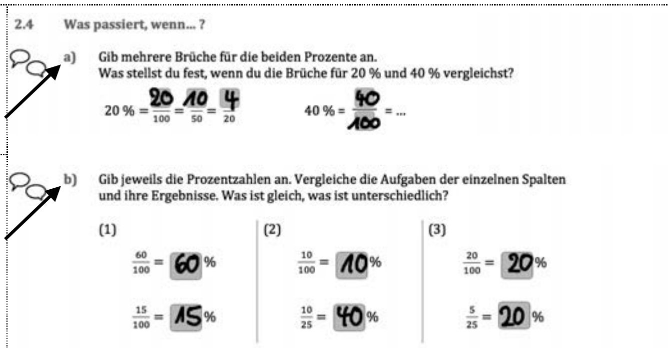
Typische Schwierigkeit: 2/2 und 1/100 werden z.T. verwechselt. Bei Bedarf in der Streifentafel kontrollieren lassen.



2.4	**Üben (5 - 10 Minuten)**
Ziel:	Umwandeln von Brüchen und Prozenten üben
Material:	-
Umsetzung:	a) EA, dann PA; b) EA, dann PA, dann UG

Zu beachten: Es können zu 20 % auch weitere Anteile gefunden werden.

Zu beachten: Darauf hinweisen, dass es um ein Muster innerhalb einer Spalte geht: Es geht um die Abgrenzung von Kürzen / Erweitern (3) und Dividieren / Multiplizieren (1) / (2) sowie um die Auswirkungen von Variationen in Zähler und / oder Nenner.



2.5 **Erarbeiten (5 - 10 Minuten)**

Ziel: Zusammenhang zwischen Erweitern und Multiplizieren reflektieren

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: PA, dann UG

Hintergrund: Hier sollte an die Idee des Verfeinerns für das Erweitern angeknüpft werden. Es hilft zu verstehen, warum die Prozentzahl nicht viermal so groß wird.
Lösung: Man muss nur den Zähler mit 4 multiplizieren.

2.5 Was passiert mit der Prozentzahl beim Erweitern?

Wenn ich den Zähler und den Nenner von $\frac{1}{5}$ mit 4 multipliziere, dann wird die Prozentzahl viermal so groß.

Hat Leonie Recht? Wie muss man den Zähler und den Nenner von $\frac{1}{5}$ verändern, damit die Prozentzahl viermal so groß ist?

Wie gehst du vor? Überprüfe dein Ergebnis mit der Streifentafel.

2.6 - 2.7 **Üben (8 - 12 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Operativ üben

Material: -

Umsetzung: 2.6 a) EA; 2.6 b) Aufgabengenerator (PA); 2.7 EA, dann evtl. UG

Zu beachten: Hier können Lernende unterschiedliche Lösungen finden und gezielt Muster entdecken.

2.6 Mehrere Lösungen

a) Welche Zahlen können hier stehen? Schreibe verschiedene Lösungen auf.

z.B. (1) $\frac{20}{100} = 20\,\%$ (2) $\frac{5}{10} = \boxed{50}\,\%$ (3) $\frac{20}{200} = \boxed{10}\,\%$

b) Stellt euch gegenseitig ähnliche Aufgaben.
Eine Person denkt sich eine Aufgabe mit Lücken aus, die andere findet passende Zahlen. Wechselt euch ab.

Lösung: Für Teil 1 gibt es viele Möglichkeiten, z.B. 10/20 = 50 %, 5/20 = 25 %, 1/20 = 5 %, ...
Wichtige Prozentzahlen (siehe auch 2.8) sollten hervorgehoben und gemerkt werden.
Für Teil 2 gibt es nur wenige Lösungen, die ruhig komplett genannt werden sollten: 1/5 = 20 %, 2/5 = 40 %, 3/5 = 60 %, 4/5 = 80 %, 5/5 = 100 % = 1.

2.7 Prozente gesucht

Finde
- drei Prozente, die du in einen Bruch mit Nenner 20 vergröbern kannst.
- drei Prozente, die du in einen Bruch mit Nenner 5 vergröbern kannst.

2.8 **Üben (15 - 20 Minuten)**

Ziel: Wichtige Prozentzahlen und ihre verschiedenen Repräsentationen miteinander verknüpfen

Material: MB: Paare finden, Folienstifte

Umsetzung: GA

Hintergrund: Wichtige Prozentzahlen und alltagstypische Verbalisierungen sollten auswendig gewusst werden.
Zu beachten: Blankokarten können zur Erstellung eigener Karten mit Folienstift beschrieben werden.
Methode: Spielvarianten zur Differenzierung: Aufgedeckte Karten bleiben offen liegen oder alle Karten liegen von Beginn an offen.
Zu beachten: Wichtig ist, über die Passung der Karten zu reden. Karten können übrig bleiben, wenn Teil und Rest in den Bildern uminterpretiert werden.

2.8 Paare finden mit Prozenten und Brüchen

Spielt „Paare finden“:

Findet Paare mit jeweils einem Bruch und einer Prozentangabe oder einem Bild.

Erfindet selbst noch eigene Karten und spielt mit ihnen.

Vorsicht! Es können Karten übrig bleiben.

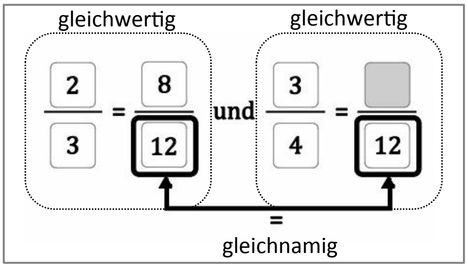
B3 A Brüche gleichnamig machen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Das Herstellen gleichnamiger Brüche ist eine Voraussetzung für ein formales Vergleichen bzw. Ordnen sowie für die Addition und Subtraktion *beliebiger Brüche*. Zentrale Voraussetzung ist ein inhaltliches Verständnis der Gleichwertigkeit von Brüchen (siehe Baustein **B2 A**) sowie das Erweitern und Kürzen (siehe Baustein **B2 B**).

Zusammenhang von gleichnamig und gleichwertig

Die Begriffe *gleichnamig* und *gleichwertig* sind für Lernende aufgrund der sprachlichen Nähe nicht immer leicht zu unterscheiden und hängen im Prozess zusammen:



Abgrenzung: gleichnamig und gleichwertig

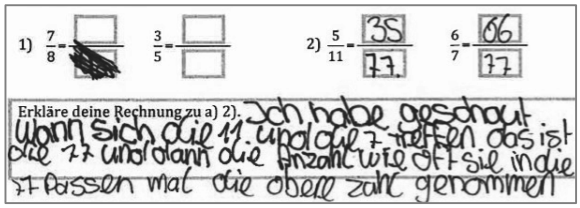
Will man zwei Brüche, 2/3 und 3/4 etwa, gleichnamig machen, so sucht man einen gemeinsamen Nenner für beide Brüche, im Beispiel die 12. Dann werden zu beiden Ausgangsbrüchen die gleichwertigen Brüche gesucht mit Nenner 12, also 8/12 und 9/12, diese sind dann zueinander gleichnamig. Gleichwertig und gleichnamig sind also Relationen zwischen den vier beteiligten Brüchen, die die Abbildung zusammenfassend zeigt.

Gleichwertige Brüche beschreiben denselben Anteil, gleichnamige Brüche in der Regel nicht. Lernende sollen beim Notieren der Brüche darauf achten, dass das Gleichheitszeichen nur zwischen den gleichwertigen Brüchen steht und nicht die Beziehung zwischen den Brüchen mit gleichen Nennern angibt.

Gleichnamige Brüche herstellen

Gleichnamige Brüche lassen sich auf verschiedenen Wegen herstellen: Anschaulich in der Streifentafel (siehe *Streifentafel*) oder über das Ausnutzen von Zahlbeziehungen. Den Vorgehensweisen, die auf Zahlbeziehungen zurückgreifen, liegt strukturell und vorstellungsmäßig das Erweitern und Kürzen bzw. Verfeinern und Vergröbern zugrunde. Die Besonderheit besteht dabei darin, *dass spezielle gleichwertige Brüche für zwei unterschiedliche Brüche gleichzeitig gesucht werden*.

Da viele rechenschwache Lernende über das Konzept des kleinsten gemeinsamen Vielfachen nicht sicher verfügen, erfolgt das Suchen des gemeinsamen Nenners mithilfe der *Vielfachenreihen* der Nenner: Treffen sich die Reihen, so kann diese Zahl als gemeinsamer Nenner genutzt werden – die Zähler müssen entsprechend oft vervielfacht werden, d.h. Zähler und Nenner müssen mit demselben Faktor erweitert werden.



Gleichnamige Brüche über Reihen finden

Ein zweiter Weg zum Finden gleicher Nenner ist die Multiplikation der Ausgangsnenner. Dieser Weg funktioniert immer und schneller als die *Vielfachenreihen*, liefert aber für nicht-teilerfremde Ausgangsnenner etwas größere Zahlen: Will man etwa zu 4/12 und 2/8 gleichnamige Brüche finden, so ergibt sich über die Multiplikation der Ausgangsnenner der gemeinsame Nenner 96. Wenn man die Reihen durchgeht, landet man schon beim gemeinsamen Nenner 24 (kleinstes gemeinsames Vielfaches von 12 und 8), der deutlich kleiner und leichter zu handhaben ist. Durch vorheriges Kürzen (2/8 = 1/4) erhält man sogar gleichnamige Brüche mit dem noch kleineren Nenner 12 (4/12 und 3/12).

Der Schritt des vorherigen Kürzens wird in der Förderung allerdings nicht systematisch angeleitet: Es wird vielmehr Wert darauf gelegt, dass Lernende das Gleichnamigmachen *inhaltlich verstehen* und für beliebige Brüche überhaupt gleichnamige Brüche herstellen können.

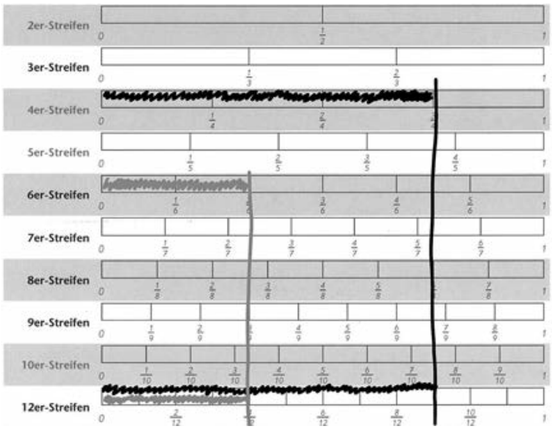
Schwierigkeiten mit dem Gleichnamigmachen

Aus struktureller Perspektive zeigen sich beim Gleichnamigmachen teilweise dieselben Schwierigkeiten wie beim Erweitern und beim Kürzen (siehe Baustein **B2 B**): Manche Lernende beziehen so z.B. den Erweiterungsfaktor, den sie für den Nenner gefunden haben, nicht mathematisch korrekt auf den Zähler. Manche Lernende multiplizieren Zähler und Nenner der beiden Brüche jeweils miteinander und verwechseln damit eventuell auch *gleich*, d.h. *identisch,* mit *gleichnamig*. Hier zeigt sich auch u.U. die Unsicherheit darüber, wie Zusammenhänge zwischen vier Brüchen hergestellt werden müssen.

Veranschaulichung und Material

Streifentafel

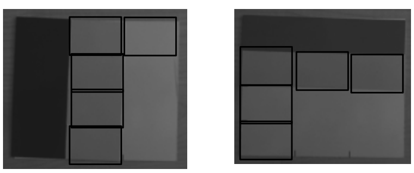
Die Streifentafel ist auch in dieser Einheit das zentrale Darstellungsmittel. Durch den Fokus auf besondere gleichwertige Anteile zu jeweils zwei Anteilen (d.h. Beziehungen zwischen vier Brüchen, s.o.) wird der Umgang mit ihr jedoch etwas komplexer, da gleichzeitig zu *zwei Anteilen* gleichwertige Anteile gefunden werden müssen. Treffen sich die Markierungen für die jeweils gleichwertigen Anteile in einem Streifen, d.h. passt die Markierung eines Streifens zu beiden Anteilen, so hat man einen gemeinsamen Nenner gefunden: Am Beispiel von 3/4 und 2/6 sieht man so z.B., dass der 12er-Streifen der erste gemeinsame Streifen ist. Im 9er-Streifen kann man zwar 2/6, aber nicht 3/4 darstellen und im 8er-Streifen kann man zwar 3/4, aber nicht 2/6 einzeichnen (siehe Abbildung). Gleichnamige Anteile sind so z.B. 4/12 und 9/12.



Gleichnamige Brüche mit der Streifentafel finden

Bruchpuzzle

Das Bruchpuzzle dient erneut dazu, der eher linearen Vorstellung, die die Streifen der Streifentafel betonen, durch eine echt flächige Darstellung zu erweitern. Hier lässt sich das Gleichnamigmachen ebenfalls durch eine gemeinsame Strukturierung erklären.


Gemeinsamer Nenner für 1/3 und 1/4: 12

Aufbau der Förderung

Fördereinheit 1 (Gleichnamige Brüche mit Streifen finden) nutzt den vorstellungsorientierten Zugriff aus Baustein **B2 A** (Gleichwertigkeit) an der Streifentafel: Die Lernenden erarbeiten anhand dieses Anschauungsmittels, was Gleichnamigkeit von Brüchen anschaulich bedeutet und verknüpfen dieses Wissen mit dem bereits bekannten Verfahren des Verfeinerns / Erweiterns, indem die Strukturierung der Streifen betrachtet wird. Gleichzeitig werden eine Abgrenzung der Begriffe sowie eine Erweiterung auf echt flächige Anschauungsmittel vorgenommen.

Die Reichweite des Anschauungsmittels ist insofern begrenzt, als es nur eine gewisse Anzahl an Streifen darstellt – zum Gleichnamigmachen beliebiger Brüche müssen so weitere allgemeinere Verfahren eingeführt und inhaltlich plausibel gemacht werden. Dazu findet in **Fördereinheit 2 (Gleichnamige Brüche berechnen)** eine sukzessive, in Fördereinheit 1 kurz angedachte (Aufgabe 1.2), Loslösung vom Material statt: Reicht die Streifentafel nicht mehr, so müssen neue Wege zum Finden gleichnamiger Brüche beschritten werden: Hier werden den Lernenden die Betrachtung von Vielfachenreihen des Nenners und das meist schnellere Verfahren des Multiplizierens der Nenner angeboten, die rückblickend an der Streifentafel begründet werden. Diese Wege werden nicht als starre Verfahren eingeführt. Stattdessen werden die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt, auch auf anderen Wegen (z.B. durch das – hier nicht systematisch angeleitete – Finden kleinerer Vielfache) gleichnamige Brüche zu finden.

Den Abschluss bilden Übungen zum Automatisieren und Systematisieren des Findens von gleichnamigen Brüchen.

Gleichnamige Brüche herstellen

Weiterführende Literatur

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 27ff.

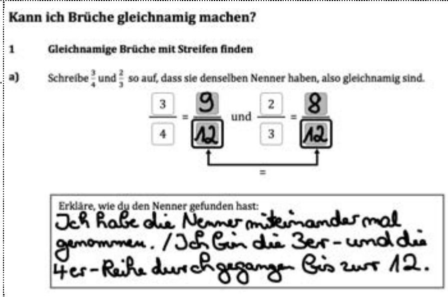
Prediger, S. (2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. In: Der Mathematikunterricht 57(3), 5 - 14.

B3 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Das Erklären des Vorgehens fällt manchen Lernenden schwer. Hier hilft es oft, Lernende dazu zu ermuntern, das aufzuschreiben, was sie denken.



Kann ich Brüche gleichnamig machen?

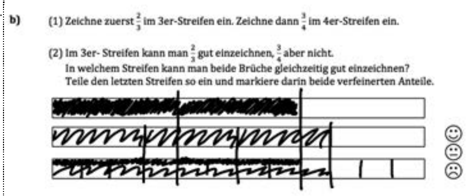
1 Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

a) Schreibe $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ so auf, dass sie denselben Nenner haben, also gleichnamig sind.

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ und $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Erkläre, wie du den Nenner gefunden hast:
Ich habe die Nenner miteinander mal genommen. / Ich bin die 3er- und die 4er-Reihe durchgegangen bis zur 12.

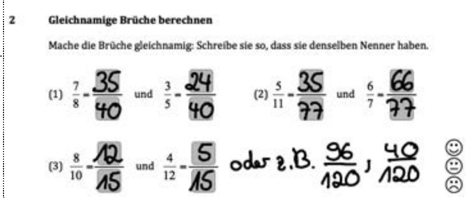
1 b) ist für Lernende u.U. ungewohnt. Hier hilft es, sie darauf hinzuweisen, dass der untere Streifen neu eingeteilt werden soll, sodass man gleichzeitig 2/3 und 3/4 gut einzeichnen kann.



b) (1) Zeichne zuerst $\frac{2}{3}$ im 3er-Streifen ein. Zeichne dann $\frac{3}{4}$ im 4er-Streifen ein.

(2) Im 3er-Streifen kann man $\frac{2}{3}$ gut einzeichnen, $\frac{3}{4}$ aber nicht.
In welchem Streifen kann man beide Brüche gleichzeitig gut einzeichnen?
Teile den letzten Streifen so ein und markiere darin beide verfeinerten Anteile.

In (3) können die Brüche weiter gekürzt werden. Hierauf sollten Lernende jedoch nicht extra hingewiesen werden, damit mehr über ihr eigenes Vorgehen in Erfahrung gebracht werden kann.



2 Gleichnamige Brüche berechnen

Mache die Brüche gleichnamig: Schreibe sie so, dass sie denselben Nenner haben.

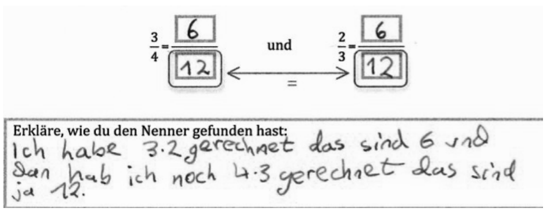
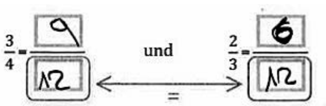
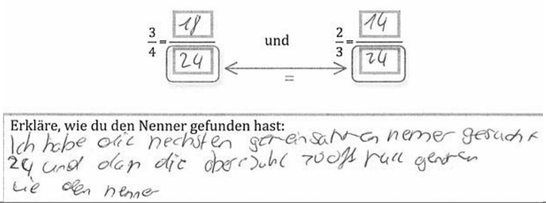
(1) $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ und $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$

(2) $\frac{5}{11} = \frac{35}{77}$ und $\frac{6}{7} = \frac{66}{77}$

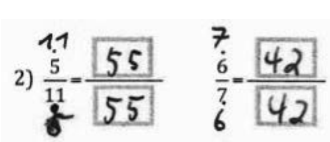
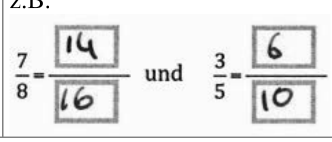
(3) $\frac{8}{10} = \frac{12}{15}$ und $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$ oder z.B. $\frac{96}{120}$, $\frac{40}{120}$

Hinweise zur Auswertung:

Diagnoseaufgabe 1: Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

	Typische Fehler	**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)		Die Zähler und die Nenner werden jeweils multipliziert, d.h. der Weg zum Finden des Nenners wird auch auf die Zähler übertragen und die Gleichwertigkeit wird aus den Augen verloren.	Festigen des Zusammenhangs von Zähler und Nenner in der Streifentafel. Erarbeiten der Struktur der Streifen (1.1). Vertiefen des Zusammenhangs von Zähler und Nenner über die Betrachtung verschiedener Brüche (1.2). Danach Begriffe sichern und flexibilisieren (1.3).
	Es wird nur der Nenner gefunden.	Es besteht Unsicherheit darin, wie der Zähler aus der Kenntnis des Nenners bestimmt werden muss.	
	z.B. 	Beide Zähler werden mit derselben Zahl multipliziert.	
		Es wird ein richtiger Nenner gefunden. Der Erweiterungsfaktor wird vermutlich falsch berechnet.	Thematisieren der Vielfachenreihen (2.1). Ggf. Kalkül üben (2.5).
b)	Es werden andere Anteile eingezeichnet.	Schwierigkeiten beim inhaltlichen Interpretieren des Gleichnamigmachens in Streifen.	Erarbeiten der anschaulichen Grundlagen des Gleichnamigmachens (1.1). Ggf. Gleichwertigkeit von Brüchen als notwendigen Schritt zum Finden gleichnamiger Brüche erarbeiten (**B2 A**).
	Es wird keine passende gemeinsame Einteilung gefunden.		

Diagnoseaufgabe 2: Gleichnamige Brüche berechnen

	Typische Fehler	**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a), b)		Zähler und Nenner werden pro Bruch miteinander multipliziert. U.U. wird *gleichnamig* auf die Identität von Zähler und Nenner bezogen. Bzw. Unsicherheit mit dem Begriff Nenner (d.h. keine Bewusstheit dafür, dass der Nenner nicht dasselbe wie der Zähler ist).	Erarbeiten der anschaulichen Grundlagen (1.1 - 1.3). Erarbeiten verschiedener Verfahren des Herstellens von gleichnamigen Brüchen auch bei größeren Nennern (2.1 - 2.3). Üben (2.4 - 2.5).
	z.B. 	Es werden jeweils gleichwertige Brüche gefunden, die aber nicht gleichnamig sind.	Erarbeiten der anschaulichen Grundlagen (1.1 - 1.3).

1 Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

1.1 Erarbeiten (15 - 20 Minuten)

Ziel: Verstehen, was *gleichnamige Brüche* bedeutet und diese mit der Streifentafel bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA; b), c) PA, dann UG

Hintergrund: Größenvergleich beliebiger Brüche wird möglich. Komplexität wird reduziert, indem zum ersten Bruch bereits ein gleichwertiger Bruch mit geeignetem Nenner vorgegeben wird. D.h. es muss nur noch zum zweiten Bruch ein gleichwertiger Bruch mit diesem Nenner gefunden werden.

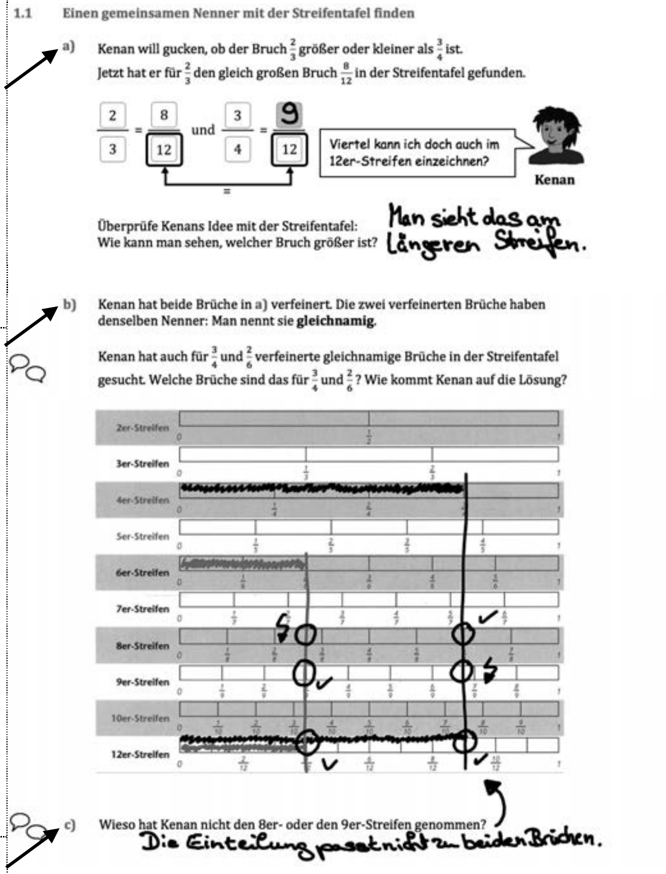
Methode: Lernende selbst zunächst in der Streifentafel suchen lassen. Erst im Anschluss das Bild in b) zu weiterem Beispiel angucken und thematisieren.

Hintergrund: Die Begriffe *gleichnamig* und *gleichwertig* (siehe **B2**) können u.U. verwechselt werden. Begriffe im ersten Zugriff voneinander abgrenzen (Systematisierung in 1.3): 2/3 und 8/12 sowie 3/4 und 9/12 sind gleichwertig, 8/12 und 9/12 sind gleichnamig.

Methode: Operative Variation der Aufgabe aus a) (2/3 → 2/6). Kann auch genutzt werden, um bei Schwierigkeiten in a) Strategie zu verstehen und zu übertragen.

Zu beachten: Nur die gleichwertigen Brüche dürfen immer wirklich gleichgesetzt werden (markiert mit einem Gleichheitszeichen). Bei gleichnamigen Brüchen betrifft die Gleichheit nur den Nenner.

Lösung: Kenan sucht einen Streifen, in dem er beide Anteile gleichzeitig gut einzeichnen kann. Unterteilung der Streifen steht für die Nenner. Alternativ wäre auch 24er-Streifen legitim.



1.1 Einen gemeinsamen Nenner mit der Streifentafel finden

a) Kenan will gucken, ob der Bruch $\frac{2}{3}$ größer oder kleiner als $\frac{3}{4}$ ist.
Jetzt hat er für $\frac{2}{3}$ den gleich großen Bruch $\frac{8}{12}$ in der Streifentafel gefunden.

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ und $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Viertel kann ich doch auch im 12er-Streifen einzeichnen?

Kenan

Überprüfe Kenans Idee mit der Streifentafel:
Wie kann man sehen, welcher Bruch größer ist? Man sieht das am Längeren Streifen.

b) Kenan hat beide Brüche in a) verfeinert. Die zwei verfeinerten Brüche haben denselben Nenner: Man nennt sie **gleichnamig**.

Kenan hat auch für $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{6}$ verfeinerte gleichnamige Brüche in der Streifentafel gesucht. Welche Brüche sind das für $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{6}$? Wie kommt Kenan auf die Lösung?

c) Wieso hat Kenan nicht den 8er- oder den 9er-Streifen genommen?
Die Einteilung passt nicht zu beiden Brüchen.

1.2 **Üben (20 - 30 Minuten)**

Ziel: Gleichnamige Brüche mit der Streifentafel bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann PA, dann UG; b) UG

Lösung: Beurteilung individuell, z.B.
Blick auf Zahlbeziehungen:
Teilerfremde Nenner: (1), (2), (3), (4), (9), (10)
Nenner, die Vielfache voneinander sind: (6), (7)
Nicht-teilerfremde Nenner, keine Vielfache: (5), (8)
Blick auf Darstellungsmittel / Produkt der Nenner:
Produkt der Nenner in Streifentafel: (1), (2), (3), (4)
Streifentafel „reicht nicht“: (5), (6), (7), (8), (9), (10)

Zu beachten: Auf die Schreibweise achten. „=“ steht nur zwischen gleichwertigen Brüchen.

1.2 Gleichnamige Brüche mit der Streifentafel finden

a) Mache in jeder Teilaufgabe beide Brüche gleichnamig:
Verfeinere also beide Brüche auf den gleichen Nenner.


Kenan

(1) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{3}$ (5) $\frac{4}{9}$ und $\frac{2}{6}$

(6) $\frac{2}{4}$ und $\frac{4}{8}$ (7) $\frac{1}{3}$ und $\frac{4}{6}$ (8) $\frac{3}{6}$ und $\frac{6}{8}$ (9) $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{9}$ (10) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$

Vergleicht eure Lösungen:
- Wo ist es leichter, wo schwerer, Brüche mit gleichem Nenner zu finden?
- Wo gibt es mehrere Möglichkeiten? Warum?
- Findet ihr auch noch andere Wege als Kenan, gleichnamige Brüche zu bestimmen?

Lösung: (9) und (10) nicht lösbar in Streifentafel. Hier kann am Vergröbern / Verfeinern bzw. Erweitern / Kürzen angedockt bzw. es können andere Wege der Lernenden aufgegriffen werden.

b) Was machst du, wenn die Streifentafel nicht ausreicht?
Schaue dir die Brüche aus a) an: Was haben die Streifen, in denen man gemeinsame Nenner findet, mit den Brüchen zu tun?

1.3 **Erarbeiten (20 - 30 Minuten)**

Ziel: Begriffe gleichnamig und gleichwertig abgrenzen; Gleichnamigkeit in flächiger Darstellung erzeugen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte, Bruchpuzzle

Umsetzung: a), b) UG; c) PA, dann UG

Hintergrund: Begriffliche Abgrenzung

1.3 Gleichnamig und gleichwertig

a) Ist gleichnamig eigentlich dasselbe wie gleichwertig?


Tara

Was bedeutet es, wenn zwei Brüche gleichnamig sind?
Was bedeutet es, wenn sie gleichwertig, also gleich groß sind?
Vergleiche dazu diese vier Brüche:

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{4}$ (3) $\frac{6}{8}$ (4) $\frac{10}{20}$

Zu beachten: Dass gleichnamige, gleich große Brüche identisch sind, kann Lernende irritieren.

b) Finde in der Streifentafel jeweils zwei Brüche, die
- gleichnamig, aber nicht gleich groß sind. z.B $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$
- gleichnamig und gleich groß sind. Die Brüche sind gleich!
- nicht gleichnamig, aber gleich groß sind. z.B. $\frac{2}{8}, \frac{6}{24}$

Methode: Lässt sich gut zu zweit oder zu dritt mit den drei entstehenden Bildern klären: Je zwei oder drei Lernende legen ihr Puzzlefeld mit den Dritteln oder den Vierteln aus. Legt man die gefüllten Grundflächen nebeneinander und stellt sie sich übereinandergelegt vor, entstehen durch die neue Einteilung Zwölftel, die ebenfalls im Material zu finden sind. Mit Zwölfteln kann man Drittel und Viertel jeweils auslegen (2/3 = 8/12, d.h. gleichwertige Brüche; 2/4 = 6/12, d.h. gleichwertig; 8/12 und 6/12 werden beide mit denselben Puzzleteilen gelegt, d.h. gleichnamig).

c) Welche Brüche wurden hier gelegt?
Mit welchen Puzzleteilen kann man beide Anteile und das Quadrat auslegen?
Was hat das mit gleichnamigen Brüchen zu tun?

2 Gleichnamige Brüche berechnen

2.1 Erarbeiten (40 - 45 Minuten)

Ziel: Gleichnamige Brüche über die Betrachtung von Zahlreihen bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) UG; b) EA, dann UG; c) PA, dann UG

Hintergrund: Mal-Reihe durchgehen bedeutet, von oben nach unten in der Streifentafel zu gucken, also *Verfeinern*. Emily vollzieht dann wichtigen Schritt, die Reihe der Zähler mit zu berücksichtigen: Diese müssen in analogen Schritten verändert werden. Dazu Verfahren von Emily in Streifentafel angucken und das Verfeinern der Streifen (Erweitern) thematisieren: Mit jedem Streifen wird jedes Viertel in ein Stück mehr geteilt; 1/4 → 2/8 → 3/12.

Methode: In Gedanken Streifen durchgehen – schwer ist es bei großen Nennern bzw. bei Nennern, deren Vielfache sich spät treffen. Ggf. mit Streifen(-tafel) überprüfen.
Zu beachten: Bei nicht-teilerfremden Brüchen treffen sich *Vielfachenreihen* auch schon vor dem Produkt der Nenner. Das kann Anlass für eine kleine Untersuchung an Beispielen sein, soll aber nicht formalisiert werden.

2.1 Gleiche Nenner über Mal-Reihen finden

a) Emily hat einen gemeinsamen Nenner für die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{5}$ gesucht. Das hat sie überlegt:

$\frac{1}{4}$: 4er-Streifen, 8er-Streifen, 12er-Streifen, 16er-Streifen, 20er-Streifen, 24er ...

$\frac{3}{5}$: 5er-Streifen, 10er-Streifen, 15er-Streifen, 20er-Streifen

Beschreibe, was Emily gemacht hat, um den gemeinsamen Nenner zu finden.

Wie sehen die Brüche in den einzelnen Streifen aus? Wie heißen sie? Was hat das mit Verfeinern und Erweitern zu tun?

Emily guckt, bei welcher Zahl sich die 4er- und die 5er-Reihe zum ersten Mal treffen. Diese Zahl kann man als gemeinsamen Nenner nutzen.

b) Finde wie Emily gleichnamige Brüche zu diesen Brüchen, indem du dir die Streifen vorstellst:

(1) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{18}$ (3) $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{15}$

Wo ist es schwer, wo ist es leicht, gleichnamige Brüche zu finden?

2.2 Erarbeiten (40 - 45 Minuten)

Ziel: Gleichnamige Brüche über das Produkt der Nenner bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) PA; b) EA, dann UG

Lösung: Ricos Weg funktioniert, weil sich die Mal-Reihen treffen: $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$. Der 7er- und der 5er-Streifen werden also auf denselben Streifen verfeinert. Den neuen Zähler bestimmt er analog über das Verfeinern: $3 \cdot 5$, $4 \cdot 7$.

Zu beachten: Rechnung an Streifentafel plausibel machen: Wichtig ist, Zähler und Nenner gleichmäßig zu verfeinern. Verknüpfung mit Emilys Weg (2.1) möglich: Rico springt direkt zu einem gemeinsamen Vielfachen, ohne Vielfache dazwischen anzuschauen.

Zu beachten: Andere Wege, etwa das vorherige Kürzen, sollten auch zugelassen werden. Sie sollten aber inhaltlich z.B. über das Vergröbern erklärt werden.

2.2 Gleichnamige Brüche über Multiplizieren der Nenner finden

a) Emilys Weg dauert mir zu lange. Ich multipliziere direkt die Nenner: $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{5}$, dann bekomme ich $7 \cdot 5 = 35$ als Nenner. Dann erweitere ich beide Brüche auf 35tel.

Überprüfe Ricos Weg für kleine Nenner an der Streifentafel: Warum funktioniert sein Weg? Wie bestimmt er die neuen Zähler?

b) Finde wie Rico gleichnamige Brüche:

(1) $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{6}$ (2) $\frac{2}{11}$ und $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{5}{4}$ und $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{3}{12}$ und $\frac{2}{5}$ (5) $\frac{1}{10}$ und $\frac{3}{4}$

(1) $\frac{18}{30}$ und $\frac{20}{30}$ (2) $\frac{6}{33}$ und $\frac{22}{33}$

(3) $\frac{25}{20}$ und $\frac{16}{20}$ (4) $\frac{15}{60}$ und $\frac{24}{60}$

(5) $\frac{4}{40}$ und $\frac{30}{40}$

2.3 **Üben (20 - 30 Minuten)**

Ziel: Gleichnamige Brüche über verschiedene Zahlbeziehungen bestimmen

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) EA, dann UG

Zu beachten: Weitere Brüche findet man auch z.B., indem man vorher die Brüche kürzt: 6/10 = 3/5, d.h. 6/10 = 9/15.

Lösung: Man nimmt lieber Ricos Weg, wenn die Nenner teilerfremd / kleiner sind. Emilys Weg nimmt man auch gerne, wenn Nenner Vielfache voneinander sind, z.B. in (2).

2.3 Auf verschiedenen Wegen gleichnamig machen

a) Rico und Emily haben beide gleichnamige Brüche für $\frac{6}{10}$ und $\frac{4}{15}$ gesucht.

Rico

$\frac{6}{10} \overset{\cdot 15}{=} \frac{90}{150}$, $\frac{4}{15} \overset{\cdot 10}{=} \frac{40}{150}$

$\frac{6}{10} \overset{\cdot 3}{=} \frac{18}{30}$, $\frac{4}{15} \overset{\cdot 2}{=} \frac{8}{30}$

Emily

Überprüfe die beiden Lösungen: Wie haben Rico und Emily die Brüche gefunden? Findest du noch weitere Brüche?

b) Finde wie Rico oder Emily gleichnamige Brüche.
Wann rechnest du lieber wie Rico, wann lieber wie Emily? Warum?

(1) $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{7}{12}$ und $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{2}{8}$ und $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{9}{11}$ und $\frac{3}{7}$ (5) $\frac{9}{20}$ und $\frac{7}{15}$

2.4 - 2.5 **Üben (20 - 25 Minuten zzgl. Aufgabengeneratoren)**

Ziel: Üben, gleichnamige Brüche zu bestimmen und dabei Muster zu entdecken

Material: MB: Würfel

Umsetzung: 2.4 a) EA, dann PA, dann UG; b) Aufgabengenerator (PA); 2.5 Aufgabengenerator (PA)

Methode: Falls Lernende Schwierigkeiten haben, Muster zu entdecken, zunächst alles beschreiben lassen, was ihnen auffällt. Ggf. gezielt auf entdeckbare Muster ansprechen. Kann auch arbeitsteilig bearbeitet und dann gegenseitig ausgetauscht und kontrolliert werden.

2.4 Was passiert, wenn ...

a) Mache die Brüche immer gleichnamig.

(1) $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{5}$	(1) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$	(1) $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$	(1) $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$
(2) $\frac{4}{6}$ und $\frac{4}{5}$	(2) $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{8}$	(2) $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$	(2) $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{6}$
(3) $\frac{4}{6}$ und $\frac{2}{5}$	(3) $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{4}$	(3) $\frac{4}{3}$ und $\frac{8}{5}$	(3) $\frac{1}{6}$ und $\frac{2}{9}$
(4) $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{5}$	(4) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$	(4) $\frac{8}{3}$ und $\frac{16}{5}$	(4) $\frac{1}{8}$ und $\frac{2}{12}$

Welche Muster fallen dir auf? Wie könnte es in der 3. und 4. Spalte weiter gehen?

Muster: 1./3. Spalte: Nenner bleiben gleich
2. Spalte: Nenner verändern sich. Zähler sind bei den gleichnamigen Brüchen nicht mehr gleich von Zeile zu Zeile.
3. Spalte: Zähler werden verdoppelt, Nenner bleiben gleich.

Zu beachten: Qualität des Prozesses sicherstellen, wenn Lernende sich oder andere überfordern. Falls keine Ideen, Muster aus anderen Teilaufgaben aufgreifen.

b) Erfindet eigene Muster und tauscht sie aus.

Zu beachten: Lernende können hier ebenfalls Muster und Besonderheiten entdecken: Z.B. identische Ausgangsbrüche, Ausgangsbrüche mit gleichem Nenner, unechte Brüche.

2.5 Brüche würfeln

Dilara und Maurice würfeln mit zwei 12er-Würfeln.

Dilara

Dilara würfelt 3 und 5 und baut daraus den Bruch $\frac{3}{5}$.
Maurice würfelt 1 und 10 und baut daraus den Bruch $\frac{1}{10}$.

Maurice

Dilara bestimmt zu den Brüchen zwei gleichnamige Brüche.
Für jeden richtigen Bruch bekommt sie einen Punkt. Dann ist Maurice dran.

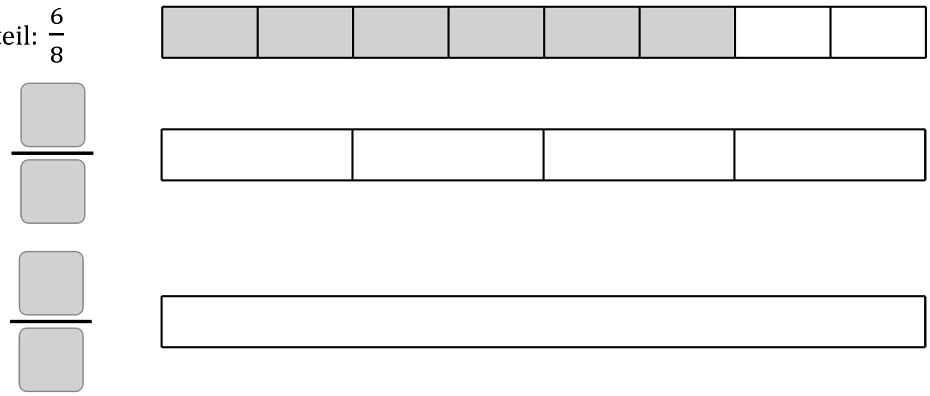
Würfelt Brüche wie Dilara und Maurice und macht sie gleichnamig.

Kann ich gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden?

1 Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

a) Zeichne in jeden Streifen einen Anteil ein, der genauso groß ist wie $\frac{6}{8}$.

Anteil: $\frac{6}{8}$



b) Beschreibe, wie du den **letzten** Anteil gefunden hast.

2 Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

a) Gib zwei Brüche an, die genauso groß sind wie $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

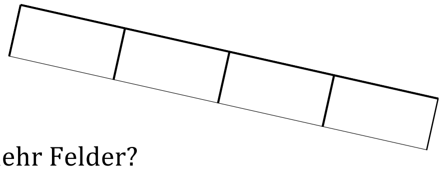
Erklärung (z.B. ein Bild oder eine Situation):

b) Leas Kuchen hat 8 Stücke. Sie isst 4 Stücke davon. Pauls Kuchen ist genauso groß, hat aber 18 kleinere Stücke. Paul isst **denselben Anteil** vom Kuchen wie Lea.
Wie viele Stücke von den 18 Stücken hat er also gegessen?

Lösung und Erklärung (z.B. ein Bild):

Kann ich gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden?

1 Gleichwertige Anteile im Kopf finden



a) Stelle dir $\frac{9}{12}$ und $\frac{3}{4}$ in Bruchstreifen vor.
Welcher Streifen hat eine feinere Einteilung, also mehr Felder?

Antwort:

b) Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$?

Antwort und Begründung:

c) Finde zwei verschiedene Brüche, die genauso groß sind wie $\frac{12}{36}$:

$$\frac{12}{36} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

Begründung:

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

a) (1) Erweitere den Bruch mit 7:

$$\frac{3}{5} = \frac{\square}{\square}$$

(2) Kürze den Bruch mit 6:

$$\frac{24}{36} = \frac{\square}{\square}$$

b) Erweitere die Brüche:

(1) $\frac{7}{11} = \frac{63}{\square}$ Es wurde mit $\square$ erweitert.

(2) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{48}$ Es wurde mit $\square$ erweitert.

c) Kürze die Brüche:

(1) $\frac{35}{120} = \frac{7}{\square}$ Es wurde mit $\square$ gekürzt.

(2) $\frac{56}{63} = \frac{\square}{9}$ Es wurde mit $\square$ gekürzt.

Kann ich Brüche und Prozente ineinander umwandeln?

1 Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln

Erweitere die Brüche auf einen Bruch mit Nenner 100.

(1) $\frac{3}{10} = \frac{\square}{100}$ (2) $\frac{7}{10} = \frac{\square}{100}$ (3) $\frac{4}{5} = \frac{\square}{100}$

☺ 😐 ☹

2 Brüche und Prozente umwandeln

a) Schreibe als Prozent.

(1) $\frac{3}{100} = \square\ \%$ (2) $\frac{4}{50} = \square\ \%$ (3) $\frac{7}{25} = \square\ \%$

b) Beschreibe, wie du (3) gerechnet hast:

c) Gib immer zwei Brüche an.

(1) $60\ \% = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{5}$ (2) $85\ \% = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

(3) $5\ \% = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ (4) $20\ \% = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

d) Wandle in Prozent um und markiere ungefähr am Prozentstreifen: $\frac{4}{100}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}$

0 % 100 %

☺ 😐 ☹