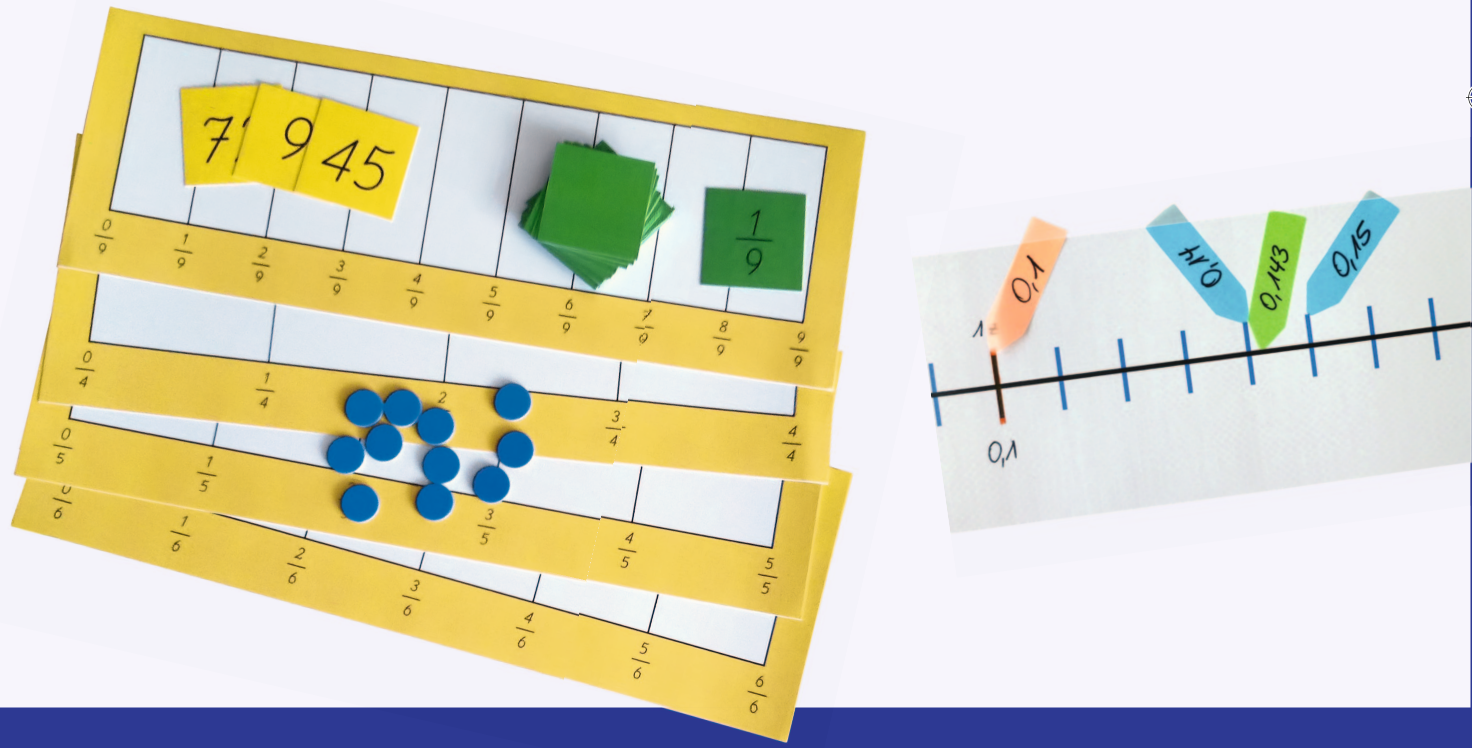
Für Lehrerinnen und Lehrer

Mathe sicher können

Auszug
"B4 A - Mit Brüchen rechnen" aus:

Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen



Brüche, Prozente, Dezimalzahlen

Ermöglicht durch
Deutsche Telekom Stiftung

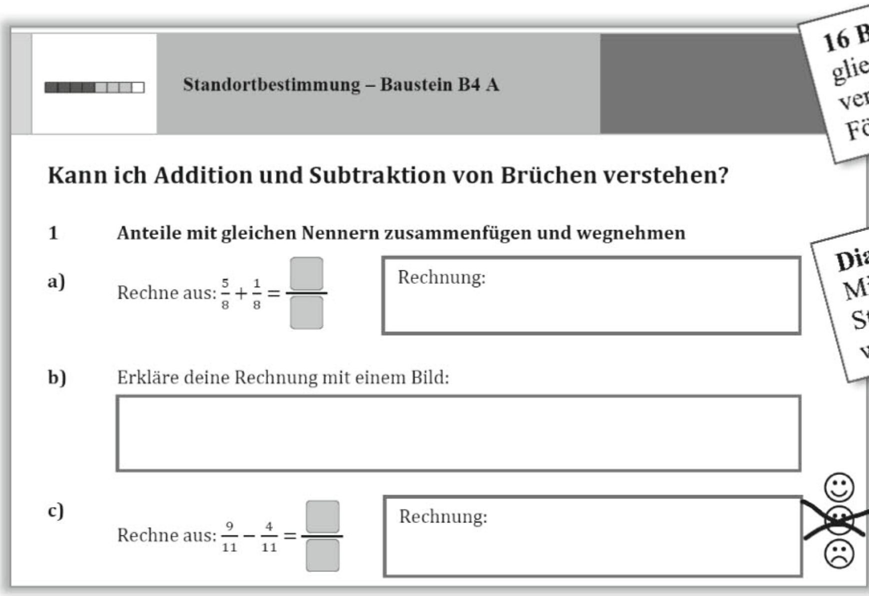
Cornelsen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

So funktioniert das Diagnose- und Förderkonzept

In den 16 Diagnose- und Förderbausteinen erarbeiten Sie
mit Ihren Schülerinnen und Schülern wichtige Basiskompetenzen.

16 Basiskompetenzen
gliedern die Bausteine und verbinden Diagnose und Förderung.



Standortbestimmung – Baustein B4 A

Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

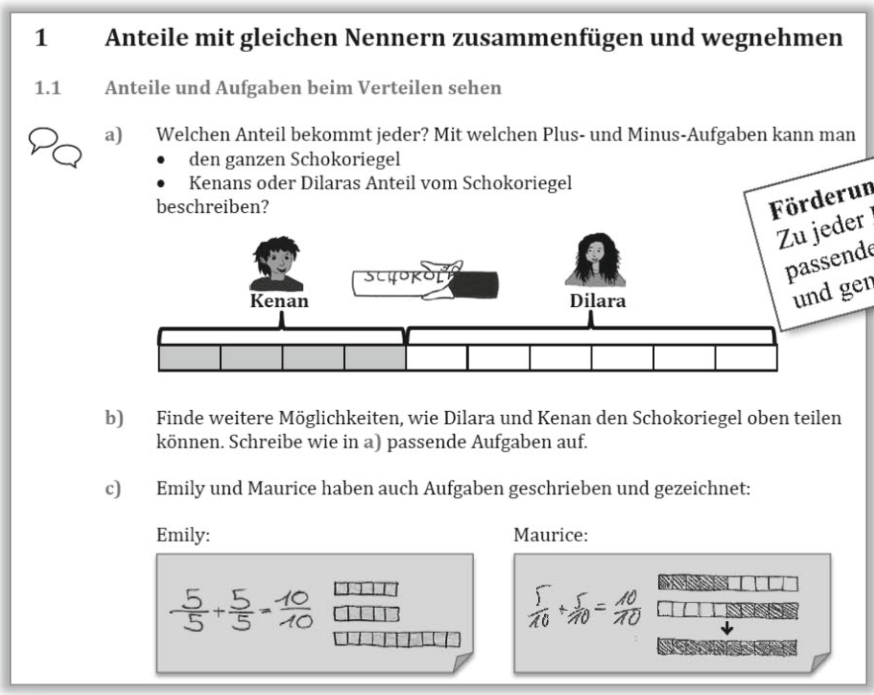
a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

Diagnose:
Mit 2 bis 4 Aufgaben in der Standortbestimmung stellen Sie fest, was die Lernenden schon können.

Die Standortbestimmungen befinden sich im hinteren Teil dieser Handreichungen als Kopiervorlage.



1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
- Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel

beschreiben?

b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.

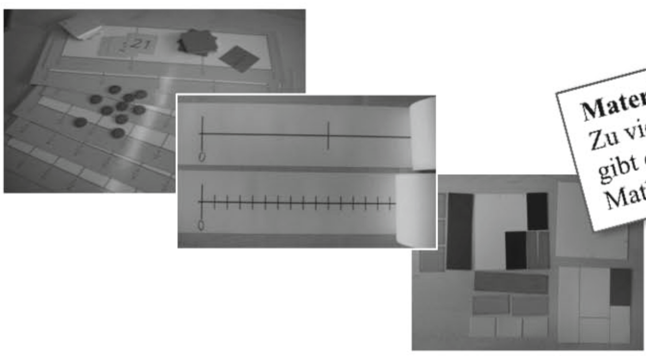
c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

Emily: $\frac{5}{5} + \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$

Maurice: $\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10}$

Förderung:
Zu jeder Diagnoseaufgabe gibt es eine passende Fördereinheit, die differenziert und gemeinsam bearbeitet wird.

Die Fördereinheiten sind in einem eigenen Förderheft abgedruckt und in dieser Handreichung erläutert.



Material:
Zu vielen Förderaufgaben gibt es Material, mit dem man Mathe besser verstehen kann.

Tipps zum Material sind in dieser Handreichung.
Viele Materialien befinden sich im zugehörigen Materialkoffer von Cornelsen Experimenta

Mathe sicher können

Handreichungen
für ein Diagnose- und Förderkonzept
zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen

Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

Entwickelt und Erprobt von
Stephan Hußmann
Birte Pöhler
Susanne Prediger
Andrea Schink
Lara Sprenger

Erarbeitet an der Technischen Universität Dortmund
im Rahmen von `Mathe sicher können´, einer Initiative der Deutsche Telekom Stiftung.

technische universität
dortmund

Deutsche
Telekom
Stiftung

Herausgeber: Susanne Prediger, Christoph Selter, Stephan Hußmann, Marcus Nührenbörger
Autorinnen und Autoren: Stephan Hußmann, Birte Pöhler, Susanne Prediger, Andrea Schink, Lara Sprenger

Redaktion: Corinna Mosandl, Birte Pöhler, Lara Sprenger
Illustration der Figuren: Andrea Schink
Alle sonstigen Bildrechte für Illustrationen und technische Figuren liegen bei den Herausgebern.

Umschlaggestaltung: Corinna Babylon

Unter der folgenden Adresse befinden sich multimediale Zusatzangebote:
www.mathe-sicher-koennen.de/Material

Die Links zu externen Webseiten Dritter, die in diesem Lehrwerk angegeben sind, wurden vor Drucklegung sorgfältig auf ihre Aktualität geprüft. Der Verlag übernimmt keine Gewähr für die Aktualität und den Inhalt dieser Seiten oder solcher, die mit ihnen verlinkt sind.

1. Auflage, 1. Druck 2014

Druck: DBM Druckhaus Berlin-Mitte GmbH

ISBN 978-3-06-006536-3

PEFC/04-31-2206

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

Dieses Dokument enhält folgenden Auszug:

Inhaltsverzeichnis der Handreichungen Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

B4 A Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Für die Beherrschung der Addition und der Subtraktion von Brüchen ist zunächst der Aufbau solider inhaltlicher Vorstellungen essentiell, bevor der Kalkül verstanden werden kann

Grundvorstellungen

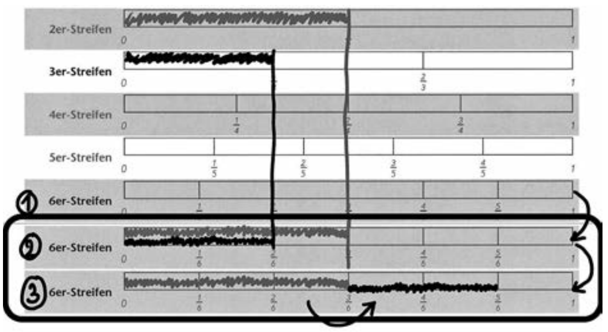
Die Grundvorstellungen für die Addition bzw. die Subtraktion von Brüchen lassen sich von den natürlichen Zahlen auf die Brüche übertragen: So kann die Addition als ein Zusammenfügen oder Hinzufügen von Anteilen und die Subtraktion als ein Wegnehmen interpretiert werden. Dies wird in Bruchstreifen kurz thematisiert.

Im Gegensatz zur intuitiv zugänglichen inhaltlichen Interpretation von Addition und Subtraktion von Brüchen, bereitet das formale Verfahren Lernenden häufig Schwierigkeiten.

Den Kalkül verstehen

Voraussetzung für das Addieren bzw. Subtrahieren beliebiger Brüche ist die Kenntnis des Verfahrens zum Gleichnamigmachen von Brüchen (siehe Baustein **B3 A**): Will man beliebige Brüche addieren bzw. subtrahieren, so muss man diese, wenn es sich nicht um auswendig gewusste Aufgaben wie beispielsweise 1/2 + 1/4 handelt, zunächst auf denselben Nenner bringen, d.h. gleichnamig machen. Gleichnamige Brüche addiert bzw. subtrahiert man dann, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält.

In der Förderung wird der Kalkül in der Streifentafel erarbeitet: Durch das Aneinander- bzw. Aufeinanderlegen der Anteile in einem gemeinsamen Streifen kann dann unmittelbar auf die Vorstellung der Addition bzw. Subtraktion natürlicher Zahlen zurückgegriffen werden: Die markierten Teile für die einzelnen Anteile werden für das Subtrahieren voneinander abgezogen (sichtbar im Schritt 2 des Bildes) und für das Addieren zusammengefügt, der durch den Streifen repräsentierte gemeinsame Nenner bleibt erhalten.



Drei Schritte der Addition von 1/2 und 1/3 in der Streifentafel

Die konkrete Darstellung der Subtraktion (des „Wegnehmens") kann in den Streifen z.T. Schwierigkeiten bereiten, gerade weil die Reihenfolge der Brüche nicht vertauscht werden kann.

Kalkül immer wieder an Vorstellung rückbinden

Auch nachdem Additions- und Subtraktionsverfahren verstehensorientiert erarbeitet wurden, stellen sie aufgrund ihrer Komplexität (erst gleichen Nenner suchen, dann Zähler addieren / subtrahieren und Nenner beibehalten) immer wieder Herausforderungen dar, die nur durch wiederholten Rückbezug zur Streifentafel bearbeitet werden können:

Den häufigsten Fehler des komponentenweisen Addierens bzw. Subtrahierens von Zähler und Nenner „(Zähler + Zähler) / (Nenner + Nenner)" kann man durch Thematisieren der Größenordnungen hinterfragen, denn werden zwei Anteile zusammengefügt, muss das Ergebnis größer sein, die komponentenweise Addition liefert aber immer einen Wert zwischen den Summanden. Auch hilft der anschauliche Rückgriff auf die quasikardinale Interpretation im Bruchstreifen zu verstehen, warum nur die Zähler bei gleichnamigen Brüchen addiert bzw. subtrahiert werden: 2 Achtel plus 3 Achtel sind 5 Achtel.

Brüche größer 1: gemischte Brüche – unechte Brüche

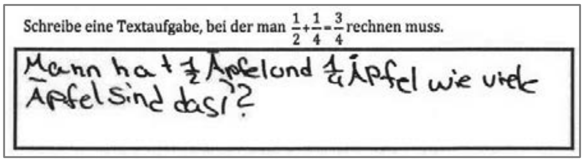
Eine weitere in dieser Einheit thematisierte Herausforderung sind die gemischten Brüche, d.h. Zahlen, die sich aus einer natürlichen Zahl und einem gebrochenen Teil zusammensetzen wie etwa 1 3/4, was eine abkürzende Schreibweise für 1 + 3/4 darstellt. Auch unechte Brüche (also Brüche größer als 1 wie 5/4) sind bislang nicht thematisiert worden.

Diese Brüche werden mittels der Vorstellung vom Hinzufügen in Bruchstreifen verstehbar: 1 3/4 bedeutet, dass man einen vollen 4er-Bruchstreifen und einen weiteren 4er-Bruchstreifen benötigt, bei dem nur drei Stücke markiert sind. Unechte Brüche, bei denen der Zähler größer ist als der Nenner, werden ebenso gedeutet: Um z.B. 5/4 darzustellen, benötigt man einen ganzen 4er-Bruchstreifen, und im zweiten Streifen ist nur 1/4 markiert.

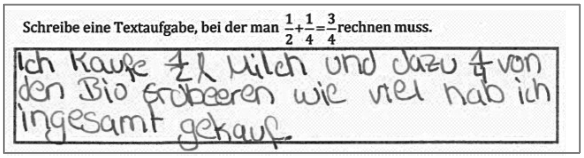
Das Ganze als Bezugsgröße beim Rechnen mit Brüchen

Eine entscheidende Schwierigkeit für Lernende beim Addieren bzw. Subtrahieren und beim Umgang mit gemischten Brüchen stellt die Beachtung des Ganzen als Bezugsgröße für die Anteile dar: Während man beim kalkülhaften Rechnen mit Brüchen als Zahlen in der Regel nicht weiter über das jeweils zugehörige Ganze nachdenkt, ist dieses beim anwendungsbezogenen Rechnen mit Anteilen in Sachzusammenhängen wichtig.

Explizit reflektieren lässt sich über das Ganze als Bezugsgröße, wenn Rechengeschichten oder Bilder zu Aufgaben gefunden werden sollen. Hier nutzen Lernende z.T. zu unterschiedlichen Ganzen gehörende Anteile und addieren so auch schon mal z.B. 1/4 Apfel und 1/2 Birne. Diese Interpretation ist nicht tragfähig: Nur wenn das Ganze für beide Anteile dasselbe ist – etwa ein Rechteck oder eine Maßzahl – können Anteile zusammengerechnet werden.



Beispiel für eine tragfähige Rechengeschichte



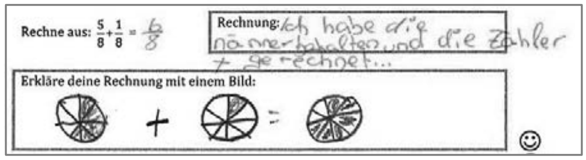
Beispiel für eine nicht tragfähige Rechengeschichte

Veranschaulichung und Material

Streifentafel und Bruchstreifen

Das zentrale Anschauungsmittel zur inhaltlichen Deutung der Addition (und auch der Subtraktion) ist die Streifentafel. Diese wird wie in Baustein **B3 A** genutzt, um gleichnamige Brüche über mögliche gemeinsame Streifen zu finden. Die Streifen repräsentieren dabei immer die Nenner der Brüche.

Lernende nutzen zum Teil auch Kreisbilder, wie in dem nachstehend abgebildeten Bild. Dies ist nicht falsch, aber technisch deutlich schwieriger zu handhaben, deswegen wird die Streifentafel bevorzugt behandelt. Eine größere Vielfalt an Darstellungen wird in Fördereinheit 3 bereit gestellt.



Darstellung der Addition in Kreisen

Aufbau der Förderung

In **Fördereinheit 1 (Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen)** werden die Addition und die Subtraktion von gleichnamigen Brüchen in Bruchstreifen (wieder-)erarbeitet, also die quasikardinale Denkweise gestärkt: 3 Achtel plus 4 Achtel sind 7 Achtel. Darüber hinaus werden auch gemischte Brüche erarbeitet, indem sie als Anteile in aneinandergelegten Bruchstreifen gedeutet werden.

In **Fördereinheit 2 (Anteile mit verschiedenen Nennern zusammenfügen und wegnehmen)** werden die Rechenverfahren auch für nicht gleichnamige Brüche erarbeitet. Hier wird in der Darstellung auf das in Baustein **B3 A** erarbeitete Gleichnamigmachen von Brüchen in der Streifentafel zurückgegriffen, das als Voraussetzung für diese Einheit bekannt sein sollte.

Fördereinheit 3 (Addition und Subtraktion vielfältig verstehen) setzt verschiedene Darstellungswechsel ein, um ein umfassendes und flexibles inhaltliches Verständnis der Addition aufzubauen. Hier wird auch die Rolle des Ganzen als Voraussetzung der Möglichkeit des Zusammenfügens von Anteilen explizit angesprochen.

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 70 - 99.

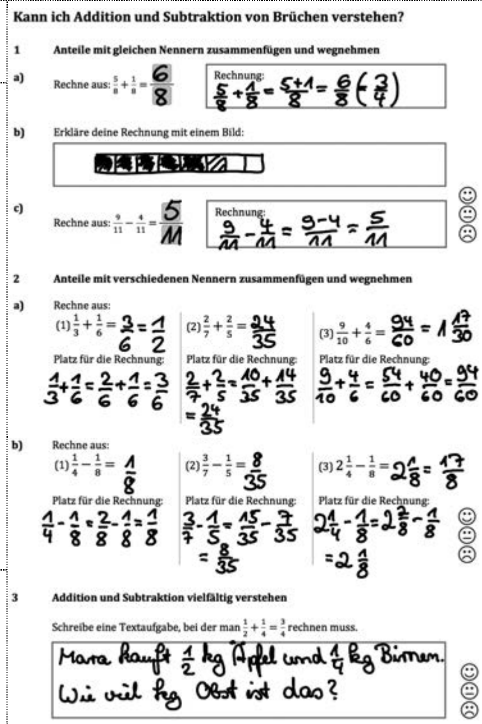
B4 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

1 b): Lernende haben z.T. Schwierigkeiten, die Rechnung mit einem Bild zu erklären.
Die Aufforderung, ein Bild zu zeichnen, in dem man gleichzeitig die beiden Anteile und das Ergebnis sehen kann, kann den Lernenden über diese Schwierigkeit hinweg helfen.

Der Impuls „Sonst musst du oft Rechnungen zu Sachaufgaben finden, hier ist es jetzt umgekehrt: Du sollst eine Situation erfinden, in der man die Aufgabe rechnen muss.“ kann den Schülerinnen und Schülern bei der Lösung der Aufgabe helfen.



Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}$

Rechnung: $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5+1}{8}=\frac{6}{8}\left(\frac{3}{4}\right)$

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11}-\frac{4}{11}=\frac{5}{11}$

Rechnung: $\frac{9}{11}-\frac{4}{11}=\frac{9-4}{11}=\frac{5}{11}$

2 Anteile mit verschiedenen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus:

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
Platz für die Rechnung: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$

(2) $\frac{2}{7}+\frac{2}{5}=\frac{24}{35}$
Platz für die Rechnung: $\frac{2}{7}+\frac{2}{5}=\frac{10}{35}+\frac{14}{35}=\frac{24}{35}$

(3) $\frac{9}{10}+\frac{4}{6}=\frac{94}{60}=1\frac{17}{30}$
Platz für die Rechnung: $\frac{9}{10}+\frac{4}{6}=\frac{54}{60}+\frac{40}{60}=\frac{94}{60}$

b) Rechne aus:

(1) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$
Platz für die Rechnung: $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

(2) $\frac{3}{7}-\frac{1}{5}=\frac{8}{35}$
Platz für die Rechnung: $\frac{3}{7}-\frac{1}{5}=\frac{15}{35}-\frac{7}{35}=\frac{8}{35}$

(3) $2\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=2\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$
Platz für die Rechnung: $2\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=2\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=2\frac{1}{8}$

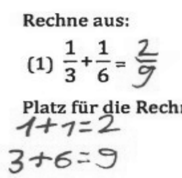
3 Addition und Subtraktion vielfältig verstehen

Schreibe eine Textaufgabe, bei der man $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ rechnen muss.

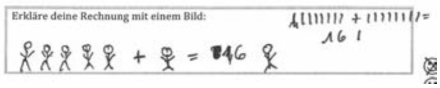
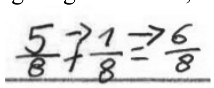
Mara kauft $\frac{1}{2}$ kg Äpfel und $\frac{1}{4}$ kg Birnen. Wie viel kg Obst ist das?

Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1), 2)	z.B.  Rechne aus: (1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$ Platz für die Rechnung: $1+1=2$ $3+6=9$	Komponentenweises Addieren / Subtrahieren, das keine Beziehung zwischen Zähler und Nenner herstellt und nicht auf Vorstellungen zurückgreift. (Häufigster Fehler nach Einführung der Multiplikation.)	Bedeutung der Addition und der Subtraktion mit 1.1 - 1.3 (gleicher Nenner) bzw. 2.1 - 2.3 (ungleiche Nenner) erarbeiten. Vertiefen in 2.4.

Diagnoseaufgabe 1: Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
b)	Bild passt nicht zur Aufgabe 5/8 + 1/8, z.B.  Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:	Die Anteile werden nicht (deutlich) auf ein gemeinsames Ganzes bezogen dargestellt. Zum Teil wird keine Beziehung zwischen Zähler und Nenner hergestellt.	Erarbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben in Streifen (1.1 - 1.2).
	Es wird kein Bild gezeichnet, sondern eine Rechnung aufgeschrieben, z.B. 	Es bestehen u.U. Unsicherheiten darin, wie ein Bild zu einer Additionsaufgabe mit Brüchen aussehen kann.	

Diagnoseaufgabe 2: Anteile mit verschiedenen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

<table>
<tr><th colspan="2">Typische Fehler</th><th>Mögliche Ursache</th><th>Förderung</th></tr>
<tr><td rowspan="2">a), b)</td><td>z.B.
(2) $\frac{2}{7}+\frac{2}{5}=\frac{4}{7}$</td><td>Einer der beiden Nenner wird beibehalten. Die Zähler werden addiert.</td><td rowspan="2">Ggf. wiederholen in B3 A (gleichnamig machen). Erarbeiten der Addition von Brüchen mit verschiedenen Nennern und üben (2.1 - 2.4). Abschließende Reflektion (3.3). Handelt es sich um einen Einmaleins-Fehler, besteht hier kein Förderbedarf bzgl. der Brüche.</td></tr>
<tr><td>z.B.
(2) $\frac{3}{7}-\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$
30 30</td><td>Es wird fehlerhaft erweitert und gleichnamig gemacht.</td></tr>
<tr><td>a.3), b.3)</td><td>z.B.
(3) $2\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=$
·2
Platz für die Rechnung:
$2\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=2\frac{2}{8}-\frac{3}{8}$
·2
$=2\frac{1}{8}$</td><td>Schwierigkeiten im Umgang mit gemischten Brüchen</td><td>Einstieg zu gemischten Brüchen mit gleichen Nennern bearbeiten (1.4). Üben mit nicht gleichnamigen Brüchen (2.2 - 2.3).</td></tr>
</table>

Diagnoseaufgabe 3: Addition und Subtraktion vielfältig verstehen

<table>
<tr><th colspan="2">Typische Fehler</th><th>Mögliche Ursache</th><th>Förderung</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>z.B.
Mir fällt nix dazu ein.</td><td>Es ist u.U. nicht klar, was eine Textaufgabe sein soll.</td><td>Vorgegebene Beispiele mit Fokus auf Darstellungswechsel bearbeiten (3.1 - 3.2).</td></tr>
<tr><td>z.B.
Schreibe eine Textaufgabe, bei der man $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ rechnen muss.
Ich habe ein halben Apfel gegessen und ich habe ein viertel Pizza gegessen also hamm ich auf mein $\frac{3}{4}$ Tagesbedarf</td><td>Es werden verschiedene Ganze miteinander verrechnet.</td><td>Relevanz des Ganzen erarbeiten und reflektieren (3.2; 3.4 - 3.5).</td></tr>
<tr><td>z.B.
Du hast $\frac{1}{2}$ Äpfel und du isst $\frac{1}{4}$ wie viele Äpfel hast du dann noch</td><td>Es wird eine Textaufgabe zu einer anderen Rechenoperation erfunden.</td><td>Passung von Situationen und Operationen reflektieren (3.1).</td></tr>
</table>

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Erarbeiten (20 - 25 Minuten)

Ziel: Additions- und Subtraktionsaufgaben als Zerlegungen von Streifen interpretieren und nutzen

Material: -

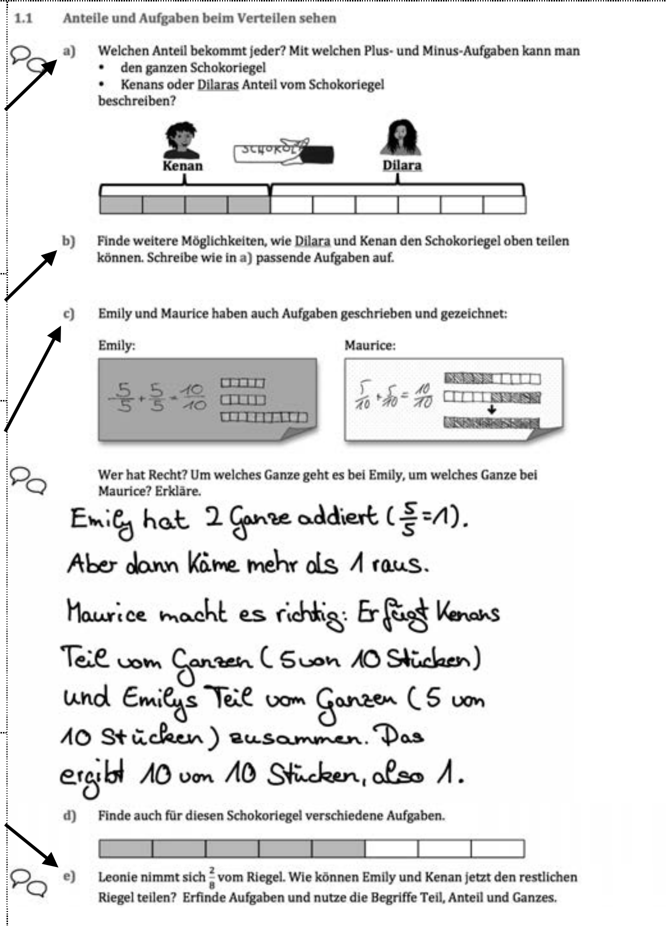
Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA, dann UG; c) UG; d), e) jeweils PA

Zu beachten: Anteile in Aufgaben einzelnen Teilen des Schokoriegels zuordnen (z.B. mit Pfeilen). Lösung: Ganzer Riegel: 4/10 (Kenan) + 6/10 (Emily); Emilys Teil: 10/10 (Riegel) – 4/10 (Kenan); Kenans Teil: 10/10 (Riegel) – 6/10 (Emily) Impuls: Was passiert beim Zusammenfügen und Wegnehmen mit Zählern und Nennern? → Zähler werden addiert, Nenner bleiben gleich.

Methode: Verschiedene Zerlegungen durch Färben anderer Stückanzahl für Kenan möglich. Aufgaben mit Streifen und Zuordnungen notieren wie in a).

Typische Schwierigkeit: Lernende interpretieren z.T. die Teile von Kenan und Emily als eigene Ganze, die zusammen den Schokoriegel (10/10) ergeben (links; Kalkül (Zähler + Zähler) : (Nenner + Nenner)). → Abgrenzung mit tragfähiger Interpretation rechts hilft, den Teil von Emily / Kenan als Teil vom Ganzen zu interpretieren und im Kalkül zu nutzen. Impuls: Wie viele Ganze hat Emily zusammengerechnet / erhält sie als Ergebnis? → 2 bzw. 1.

Typische Schwierigkeit: Lernende sprechen z.T. nicht über Achtel, „weil es ja nur noch 6 Stücke sind: 8 – 2 (Leonies Stücke) = 6 “. → Deutlich machen, welches Ganze (6 oder 8) man betrachtet. Voraussetzung: Begriffe (Teil, Anteil, Ganzes) wichtig (siehe **B1 A**, 1.3 hilfreich).


1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
- Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel

beschreiben?

Kenan Dilara

b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.

c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

Emily: $\frac{5}{5}+\frac{5}{5}=\frac{10}{10}$

Maurice: $\frac{5}{10}+\frac{5}{10}=\frac{10}{10}$

Wer hat Recht? Um welches Ganze geht es bei Emily, um welches Ganze bei Maurice? Erkläre.

Emily hat 2 Ganze addiert ($\frac{5}{5}=1$).
Aber dann Käme mehr als 1 raus.
Maurice macht es richtig: Er fügt Kenans Teil vom Ganzen (5 von 10 Stücken) und Emilys Teil vom Ganzen (5 von 10 Stücken) zusammen. Das ergibt 10 von 10 Stücken, also 1.

d) Finde auch für diesen Schokoriegel verschiedene Aufgaben.

e) Leonie nimmt sich $\frac{2}{8}$ vom Riegel. Wie können Emily und Kenan jetzt den restlichen Riegel teilen? Erfinde Aufgaben und nutze die Begriffe Teil, Anteil und Ganzes.

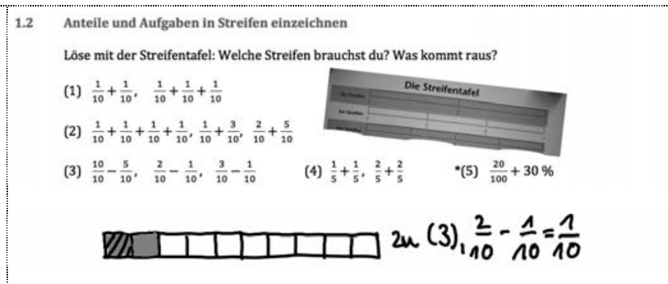
1.2 Üben (10 - 15 Minuten)

Ziel: Anteile in Streifen addieren und subtrahieren können

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: EA, dann PA

Typische Schwierigkeit: Addition sieht man direkter. Subtraktion ist schwieriger darstellbar, z.B. über Schraffieren eines bereits gefärbten Teils.
(5) ist schwierig, denn sie erfordert mehrere Schritte und Umwandeln von Prozente in Brüche.
Lösung: (1) 2/10, 3/10; (2) 4/10, 4/10, 7/10;
(3) 5/10, 1/10, 2/10; (4) 2/5, 4/5; (5) 20/100 + 30/100 = 50/100; Nenner gibt den Streifen vor.


1.2 Anteile und Aufgaben in Streifen einzeichnen

Löse mit der Streifentafel: Welche Streifen brauchst du? Was kommt raus?

(1) $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$

(2) $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$

(3) $\frac{10}{10}-\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}-\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}-\frac{1}{10}$

(4) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$

*(5) $\frac{20}{100}+30\,\%$

Die Streifentafel

zu (3), $\frac{2}{10}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$

1.3 **Üben (8 - 12 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Anteile schriftlich bzw. im Kopf addieren und subtrahieren können

Material: MB: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) Aufgabengenerator (PA)

Lösung: Verschiedene Begründungen möglich. Gut passen Additions- und Subtraktionsaufgaben zusammen.

Zu beachten: Notation auch mit einem Bruchstrich möglich: $\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5+3}{10}=\frac{8}{10}$, da man im gleichen Streifen nur die Anzahl der gleich großen Stücke berücksichtigen muss.

1.3 Aufgaben mit und ohne Streifen lösen

a) Löse die Aufgaben. Überprüfe anschließend mit der Streifentafel. Welche Aufgaben passen gut zusammen?

(1) $\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}$ (2) $\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$ (3) $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$

(4) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$ (5) $\frac{7}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$ (6) $\frac{8}{10}-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$

Zu beachten: Gleichnamige Brüche nutzen. Lernende ermutigen, auch andere Nenner als in a) oder mehrere Brüche in einem Streifen zu nutzen.

b) Stellt euch gegenseitig Aufgaben: Eine Person nennt eine Aufgabe wie in a), die andere löst sie und findet eine passende Aufgabe. Überprüft mit der Streifentafel. Wechselt euch ab.

1.4 **Erarbeiten (15 - 20 Minuten)**

Ziel: Additions- und Subtraktionsaufgaben lösen, in denen Brüche größer 1 vorkommen

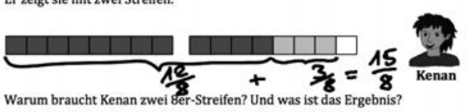
Material: -

Umsetzung: a) UG; b) EA, dann UG; c) UG; d), e) jeweils EA, dann UG

Typische Schwierigkeit: Übergang zu Brüchen größer 1 schwer, da das Ganze, auf das sich der Bruch bezieht 1 bleibt: 12/8 + 3/8 = 15/8, d.h. 8er-Streifen bleibt Referenz für den Nenner und nicht etwa 16 (d.h. 2 Streifen). → Thematisieren, um zu verstehen, warum man beim Addieren / Subtrahieren gleichnamiger Brüche den Nenner nicht addiert.

1.4 Mehr als ein Ganzes

a) Kenan hat eine neue Aufgabe bekommen: $\frac{12}{8}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$.
Er zeigt sie mit zwei Streifen.



Warum braucht Kenan zwei 8er-Streifen? Und was ist das Ergebnis?

Kenan braucht 2 Streifen, weil $\frac{15}{8}$ größer als 1 ist.

Zu beachten: Gemischte Brüche werden erst in c) als Schreibweise eingeführt.
Lösung: (1) 5/8, 14/8; (2) 10/8, 12/8; (3) 10/8, 11/8, 12/8
Impuls: Was fällt dir auf? → In (3) wird im Ergebnis weiter gezählt.

b) Zeige die Aufgaben wie Kenan. Was kommt als Ergebnis raus?

(1) $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$, $\frac{11}{8}+\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}$, $\frac{15}{8}-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{13}{8}-\frac{3}{8}$, $\frac{14}{8}-\frac{3}{8}$, $\frac{15}{8}-\frac{3}{8}$

Hintergrund: Rückgriff auf Darstellung aus a): „Weil die 1 für einen vollen Bruchstreifen steht."
Typische Schwierigkeit: Lernende deuten Schreibweise 1 4/8 z.T. als Multiplikation.

c) Den Bruch $\frac{12}{8}$ kann man auch anders schreiben: $\frac{12}{8}=\frac{8}{8}+\frac{4}{8}=1+\frac{4}{8}=1\frac{4}{8}$

Erkläre mit den Streifen und mit a), warum man das so schreiben kann.

Lösung: 13/9 = 1 4/9, 18/9 = 2, 23/9 = 2 5/9

d) Zeige die Aufgaben am Streifen und löse sie:

(1) $\frac{12}{9}+\frac{1}{9}=\frac{13}{9}$ (2) $\frac{12}{9}+\frac{6}{9}=\frac{18}{9}$ (3) $\frac{12}{9}+\frac{11}{9}=\frac{23}{9}$

Schreibe die Ergebnisse wie in c). $1\frac{4}{9}$, 2, $2\frac{5}{9}$

Methode: Anteile mit Streifen identifizieren.
Lösung: 3 (Ganzes) – 10/4 (hell/dunkel) = 2/4 (weiß); 3/4 (d.) + 7/4 (h.) = 10/4 (h./d.); 3 (Ganzes) – 3/4 (dunkel) = 9/4 (h./weiß); Verschiedene weitere Lösungen und Notationen (siehe c)) möglich.

e) Welche Plus- und Minus-Aufgaben gehören zu den Streifen? Was ist das Ergebnis?

2 Anteile mit verschiedenen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

2.1 **Erarbeiten (25 - 30 Minuten)**

Ziel: Addition und Subtraktion nicht gleichnamiger Brüche in der Streifentafel inhaltlich herleiten

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

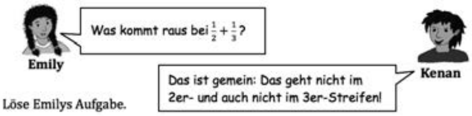
Umsetzung: a) EA, dann UG; b) UG; c) jeweils PA, dann UG

Voraussetzung: Für Übergang zur Addition nicht gleichnamiger Brüche wird an Darstellung zum Finden gleicher Nenner aus **B3 A** angeknüpft.

Zu beachten: Lernende entwickeln hier zunächst selbst Ideen – erst dann Besprechung von Emilys Weg in b). Ggf. restliches Blatt zunächst abdecken. Wer hier schon formal addiert, sollte dennoch in b) inhaltlichen Hintergrund zur Fundierung erarbeiten.

2.1 Gemeinsamen Streifen finden

a)



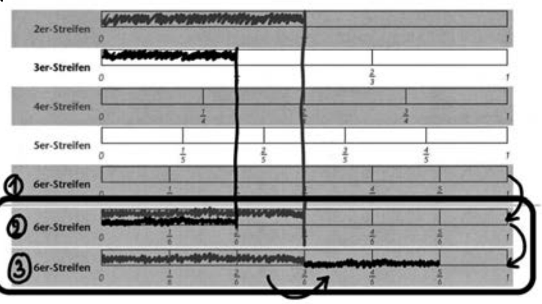
Löse Emilys Aufgabe.

Hintergrund: Streifentafel erklärt Kalkül inhaltlich: Anteile kann man gut in demselben Streifen zusammenfassen oder wegnehmen. Gleichen Streifen zu suchen bedeutet, die Brüche gleichnamig zu machen.

Lösung: Emily nimmt den 6er-Streifen, weil dort beide Anteile darstellbar sind (die Einteilung passt zum 2er- und zum 3er-Bruchstreifen). Addition sieht man von Schritt 2 zu 3: 1/2 ist 3/6, 1/3 ist 2/6 im 6er-Streifen. Aneinandergelegt ergibt das 5/6. Nach Möglichkeit an Ideen der Lernenden aus a) anknüpfen.

Methode: Ggf. Anteile als Streifen vorbereiten und b) in der Streifentafel nachlegen.

b) Emily löst die Aufgabe mit der Streifentafel:



Beschreibe, was Emily in den Schritten 1, 2 und 3 macht:
- Warum nimmt sie den 6er-Streifen? Warum geht nicht der 3er-Streifen?
- Wo sieht man im 6er-Streifen die Addition?
- Was ist das Ergebnis?
- Vergleiche deinen Lösungsweg zu a) mit Emilys Weg.

Hintergrund: Emilys Weg für weitere Beispiele nachvollziehen. Dabei auch Subtraktion als Wegnehmen in einem gemeinsamen Streifen kennen lernen. Explizierung der Notation der Addition und Subtraktion im gemeinsamen Streifen: 1/4 + 2/3 lässt sich besser im 12er-Streifen ablesen. Man schreibt: 1/4 + 2/3 = 3/12 + 8/12 = 11/12. Analog: 2/3 – 1/4 = 8/12 – 3/12 = 5/12.

Methode: Ggf. Anteile als Streifen vorbereiten und in der Streifentafel nachlegen.

c) Löse die Aufgaben $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$ und $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ in der Streifentafel.

Beschreibe, was du machst. Übertrage die Streifen.

Was hat der Streifen, in dem man die Lösungen ablesen kann, mit dem 4er- und dem 3er-Streifen zu tun? Wie könntest du $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ anders schreiben?
Warum geht das? Schreibe die Aufgaben für den neuen Streifen mit Ergebnis auf.

2.2 - 2.3 **Üben (25 - 30 Minuten zzgl. Aufgabengeneratoren)**

Ziel: Addition und Subtraktion nicht gleichnamiger Brüche in der Streifentafel üben

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: 2.2 a) EA, dann PA; b) Aufgabengenerator (PA); 2.3 a), b) jeweils EA, dann PA; c) Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: (1) ist leicht zum Einstieg. Produkt der Nenner ist nicht immer in der Streifentafel zu finden. Lösen Lernende Aufgaben nur mit Kalkül, diesen an Streifen rückbinden.

Lösung: (2) anderer Streifen notwendig. (3) / (4) nur Zähler werden vertauscht aber es kommt jeweils anderes Ergebnis heraus. (6) / (7) einfach, weil 5 in die 10 passt. Lernende finden oft 20 oder 50 als Nenner. (9) einfach, weil 3 in 6 passt.

2.2 Mit der Streifentafel addieren

a) Löse wie Emily mit der Streifentafel. Schreibe immer auch die Brüche im letzten Streifen und das Ergebnis auf. Was fällt dir auf?

oder andere Nenner

(1) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ (2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ (3) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$ (4) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$ (5) $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20}$

(6) $\frac{2}{5}+\frac{4}{10}=\frac{8}{10}$ (7) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ (8) $\frac{4}{6}+\frac{1}{8}=\frac{19}{24}$ (9) $\frac{4}{6}+\frac{1}{3}=\frac{6}{6}=1$

Zu beachten: Wenn Aufgaben nicht in der Streifentafel lösbar sind: Streifen zeichnen, andere Wege entwickeln lassen, Aufgaben zurückstellen für 2.4.

b) Stellt euch gegenseitig Aufgaben: Eine Person nennt eine Aufgabe, die andere löst sie. Überprüft mit der Streifentafel oder mit Bruchstreifen. Wechselt euch ab.

2.3 Mit der Streifentafel subtrahieren

Lösung: Für Subtraktion muss man den zweiten Anteil über den ersten legen (nicht anlegen). Gemeinsamer Streifen ändert sich nicht: 11/15 bzw. 1/15

a) Löse die Aufgabe $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$ mit der Streifentafel.
Was muss man an dem Bild verändern, wenn man die Aufgabe $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$ rechnen will? Was bleibt gleich?

Zu beachten: Verschiedene Nenner möglich.

b) Löse wie in a).

(1) $\frac{2}{4}+\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}$ (2) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$ (3) $\frac{4}{6}+\frac{1}{4}$, $\frac{4}{6}-\frac{1}{4}$

Zu beachten: Wenn gemeinsamer Nenner nicht in der Streifentafel zu finden ist: siehe 2.2 b).

c) Stellt euch gegenseitig Aufgaben: Eine Person nennt eine Aufgabe, die andere löst sie. Überprüft mit den Bruchstreifen. Wechselt euch ab.

2.4 **Erarbeiten (10 - 15 Minuten)**

Ziel: Additionsaufgaben lösen können, bei denen der gemeinsame Nenner nicht in der Streifentafel vorkommt

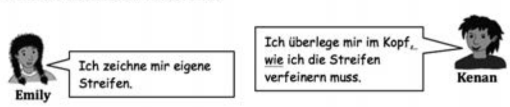
Material: -

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Lösung: 40er- bzw. 36er-Streifen.

Lösung: 5er- und 8er-Reihe treffen sich bei 40 (jedes Fünftel in 8 Stücke, jedes Achtel in 5 Stücke), 4er- und 9er-Reihe bei 36, siehe **B3 A** (u.a. Begriffe *verfeinern* und *vergröbern*).

2.4 Wenn die Streifentafel nicht reicht



a) Löse die Aufgaben $\frac{3}{5}+\frac{1}{8}=\frac{29}{40}$ und $\frac{3}{4}+\frac{1}{9}=\frac{31}{36}$ wie Emily.

b) Sieh dir dein Bild an: Wie hast du die Streifen verfeinert? Erkläre Kenans Idee.

Zu beachten: Anteile können in gemischter und nicht gemischter Form notiert werden.

Impuls: Was fällt auf? → (1) Es wird 1 im Zähler weniger. (2) Nenner ändert sich auch. (3) Geschickte Wege: Z.B. 2 1/2 – 5/4 = 2 1/2 – 1 1/4 = 1 1/4.

c) Auch bei diesen Aufgaben reicht die Streifentafel nicht, denn es kommen Brüche größer 1 vor. Löse wie Emily oder Kenan.

(1) $\frac{11}{4}-\frac{1}{2}$, $\frac{10}{4}-\frac{1}{2}$, $\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{12}{5}-\frac{3}{2}$, $\frac{12}{5}-\frac{4}{3}$, $\frac{12}{5}-\frac{5}{4}$

(3) $2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}-\frac{5}{4}$

(1) $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{9}{10}$, $\frac{16}{15}$, $\frac{23}{20}$

(3) $2\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$

3 Addition und Subtraktion vielfältig verstehen

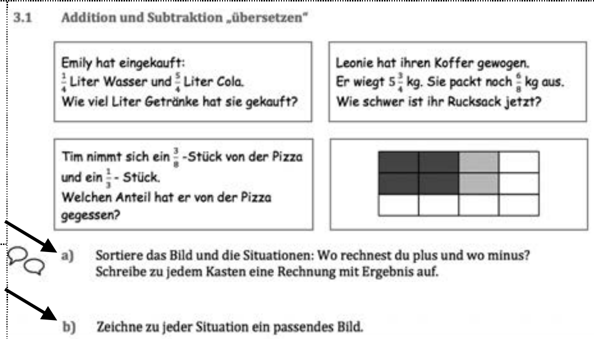
3.1 Üben (15 - 20 Minuten)

Ziel: Darstellungswechsel zwischen Situation und Term, Situation und Bild, Bild und Term vornehmen

Material: -

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA, dann UG

Lösung: Plus: Emily (1/4 + 5/4 = 6/4 = 1 1/2), Tim (3/8 + 1/3 = 9/24 + 8/24 = 17/24)
Minus: Leonie (5 3/4 – 6/8 = 5)
beides: Bild (z.B. 6/12 – 2/12 = 4/12; 4/12 + 2/12 = 6/12)



Lösung: Z.B. für Emily:

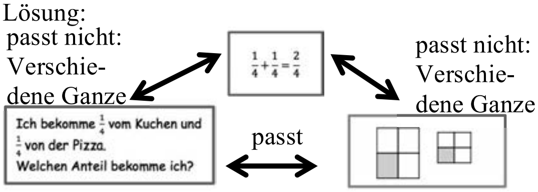
3.2 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

Ziel: Darstellungswechsel beurteilen und Bezug der Anteile auf das Ganze verstehen

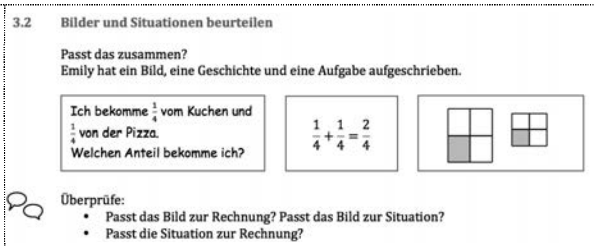
Material: MB: Ggf. Streifentafel(n)

Umsetzung: PA, dann UG

Lösung:



Zu beachten: Falls Bild als passend zur Rechnung interpretiert wird, mit Streifentafel argumentieren.
Impuls: Was muss man an der Geschichte / am Bild ändern, damit Rechnung passt? → Gleiche Ganze.



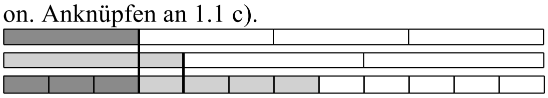
3.3 Üben (5 - 10 Minuten)

Ziel: Typische Fehlvorstellung auf Kalkülebene zur Addition widerlegen

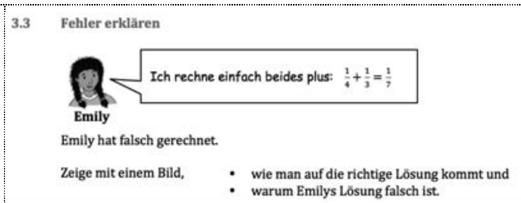
Material: -

Umsetzung: PA, dann UG

Lösung: Beim Addieren sucht man für beide Anteile gemeinsamen Streifen → findet man durch Erweitern / Verfeinern der Stücke und nicht durch Addition. Anknüpfen an 1.1 c).



Impuls: Vergleiche 1/4 und 1/7. → Ergebnis kleiner.



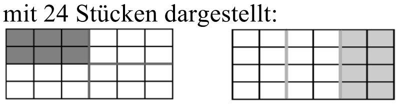
3.4 **Üben (15 - 20 Minuten)**

Ziel: Darstellungswechsel vom Term zum Bild beurteilen und Bezug der Anteile auf das Ganze reflektieren; selbst Darstellungswechsel vom Term zum Bild vornehmen

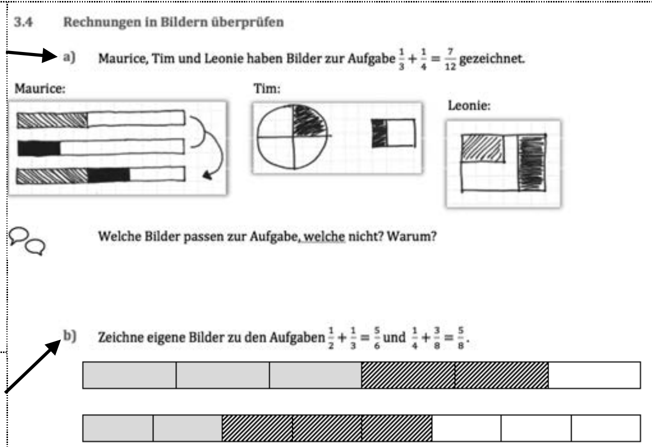
Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) EA, dann PA, dann UG

Typische Schwierigkeit: Es wird oft nicht beachtet, dass Addition nur funktioniert, wenn sich die Anteile auf dasselbe Ganze / ein gleichartiges Ganzes beziehen.
Lösung: Maurice passt: Addition wie in der Streifentafel. Tim passt nicht: Verschiedene Ganze. Leonie passt: Beide Anteile im selben Rechteck / Ganzen mit 24 Stücken dargestellt:



Lösung: Verschiedene möglich. Wichtig ist, dass nicht Anteile verschiedener Ganze addiert werden.



3.5 **Üben (20 - 25 Minuten)**

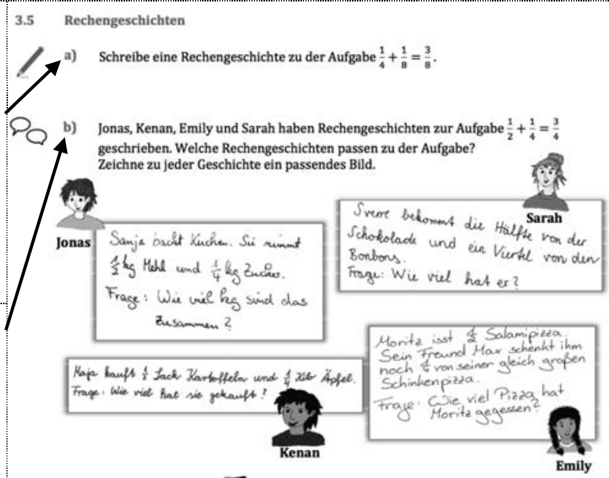
Ziel: Darstellungswechsel vom Term zur Situation vornehmen und beurteilen

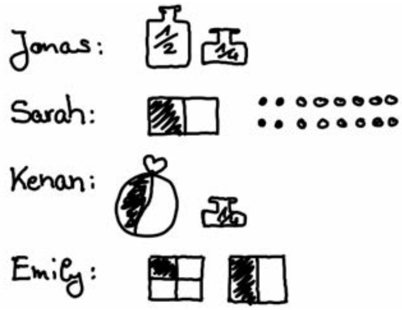
Material: -

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA, dann UG

Lösung: Verschiedene Umsetzungen möglich. Typische Schwierigkeit: Lernende schreiben keine Rechengeschichten, sondern z.B. Anweisungen: „Du rechnest 1/4 + 1/8 = 3/8 und es ist richtig.“ Dann klären, dass Rechengeschichte Situation meint, in der die Rechnung gelöst wird. Lernende schreiben Aufgaben, bei denen verschiedene Ganze addiert werden – ähnlich wie b). Aufgaben ggf. zurückstellen und nach b) bearbeiten.

Lösung: Jonas Geschichte passt: Sanja fügt Mehl und Zucker zusammen, aber durch gemeinsame Größe kg beziehen sich Anteile auf dasselbe Ganze (Gewicht). Sarahs Geschichte passt nicht: Schokolade und Bonbons kann man nicht zusammen rechnen. Zahlenbeispiel hilft, zu überzeugen: Bei 10 Schokostücken und 20 Bonbons bekäme Sverre 5 Schokostücke und 5 Bonbons, d.h. 10 von 30 Stücken, d.h. 1/3. 1/2 + 1/4 = 3/4. Kenans Geschichte passt nicht: Maja verrechnet verschiedene Größen (Sack und Kilo). Emilys Geschichte passt, weil die Pizzen von Moritz gleich groß sind. Abgrenzung von Sanja, Sverre und Maja wichtig, aber für Lernende nicht einfach.
Impuls: Wie kann man die Geschichten passend machen? → gemeinsame Ganze nutzen.





Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$

Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\square}{\square}$

Rechnung:

☺ 😐 ☹

2 Anteile mit verschiedenen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus:

(1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

Platz für die Rechnung:

(2) $\frac{2}{7} + \frac{2}{5} =$

Platz für die Rechnung:

(3) $\frac{9}{10} + \frac{4}{6} =$

Platz für die Rechnung:

b) Rechne aus:

(1) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$

Platz für die Rechnung:

(2) $\frac{3}{7} - \frac{1}{5} =$

Platz für die Rechnung:

(3) $2\frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$

Platz für die Rechnung:

☺ 😐 ☹

3 Addition und Subtraktion vielfältig verstehen

Schreibe eine Textaufgabe, bei der man $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ rechnen muss.

☺ 😐 ☹