

Didaktischer Kommentar zur Unterrichtseinheit ab Klasse 9:

Bedingte Wahrscheinlichkeiten –

Teil-Ganzes-Beziehungen verstehen

Baustein B: Wahrscheinlichkeiten als Teil-Ganzes-Beziehungen deuten
(wird in 2021 veröffentlicht)



Zitierbar als

Projektherkunft

Dieses Material wurde durch Monika Post und Susanne Prediger konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International weiterverwendet werden.

Post, Monika & Prediger, Susanne (2020). Bedingte Wahrscheinlichkeiten – Teil-Ganzes-Beziehungen verstehen. Didaktischer Kommentar zum sprach- und fachintegrierten Unterrichtsmaterial. Open Educational Resources unter sima.dzlm.de/um/9-002

Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts SiMa – Sprachbildung im Mathematikunterricht unter Projektleitung von Susanne Prediger.

Steckbrief zur Unterrichtseinheit

Klassenstufe	Ab Klasse 9
Dauer	12-15 Stunden
Material	Buntstifte Internetzugang zu Erklärvideos

Worum geht es mathematisch? Wahrscheinlichkeiten als Teil-Ganzes-Beziehungen deuten

Viele Schülerinnen und Schüler haben bei Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten Schwierigkeiten, bedingte von kombinierten Wahrscheinlichkeiten abzugrenzen oder die Bedingung vom bedingten Ereignis zu unterscheiden (Eichler & Vogel 2013). Statt Anteilsaussagen bewusst zu reflektieren, kombinieren Schülerinnen und Schüler teilweise Merkmale unabhängig von der vorliegenden Merkmalsbeziehung oder nehmen sprachliche Unterschiede zwischen kombinierten und bedingten Wahrscheinlichkeiten als sprachliche Variation wahr, die jedoch inhaltlich verschiedene Wahrscheinlichkeiten adressieren.

Um die dahinterliegenden Bedeutungsunterschiede zu verstehen, reicht es nicht, die Lernenden aufzufordern, genauer zu lesen. Um die Unterschiede in Wahrscheinlichkeitsfragen zu erklären, muss genau analysiert werden, welche Merkmale jeweils wie miteinander in Bezug gesetzt werden.

Wenn eine Verständigung über Aussagen zu Wahrscheinlichkeiten und ihren Bezügen schwerfällt, bewährt es sich, die Bezüge stattdessen zunächst in Anteilen von unterschiedlichen Ganzen auszudrücken. *Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige männliche Person Videos schaut*, entspricht dann dem *Anteil der video-schauenden männlichen Personen an allen Männern*. Hier wird der Unterschied zum *Anteil der videoschauenden männlichen Personen an allen Personen* sprachlich explizit, was die entsprechende kombinierte Wahrscheinlichkeit ausdrückt.

Aber auch in Anteilsaussagen ist es häufig eine Hürde, die relevanten Gruppen, d.h. den Teil und das Ganze, und die Beziehung, d.h. die Teil-Ganzes-Beziehung, richtig zu dekodieren oder präzise zu beschreiben. Bevor Wahrscheinlichkeiten als Anteile gedeutet werden können, ist es somit wichtig, die unterschiedlichen Anteile an verschiedenen Ganzen, d.h. die verschiedenen Teil-Ganzes-Beziehungen, genau zu durchdenken. Hierzu gehört einerseits zu erkennen, welche Merkmale bzw. Gruppen relevant sind, und andererseits in welcher Beziehung diese zueinanderstehen. Ritualisiert wird der Blick auf die Teil-Ganzes-Beziehungen durch die drei Fragen:

- Welche ganze Gruppe ist gemeint?
- Welche Teilgruppe ist gemeint?
- Was ist der Anteil?

Die sprachliche Hürde beim *Lesen* dieser subtilen Unterschiede in den Satzkonstruktionen ist somit nicht das einzige Problem. Meist geht es darum, dass die Sprache zum *Denken* fehlt, um die Bedeutungen der kleinen Unterschiede zu *durchdenken* und zu verbalisieren. Auch wenn Lehrkräfte Erklärungen geben, können Lernende, denen diese bedeutungsbezogene Sprache zum Denken fehlt, auch nicht mitdenken. Daher muss eine bedeutungsbezogene Denksprache bei den Lernenden erst aufgebaut werden.

Identifizieren der sprachlichen Anforderungen in dem Themenfeld

Damit die Lernenden nicht nur „hier das im Bild“ sagen können, sondern Teilgruppe, ganze Gruppe und die Teil-Ganzes-Beziehung sowie die Unterscheidung von Teil-Ganzes-Beziehungen expliziert beschreiben können, lohnt es sich, einige Satzbausteine zu sammeln. Erforderlich sind einerseits **bedeutungsbezogene Sprachmittel**, um Teil-Ganzes-Beziehungen (auch im Kontext) präzise zu beschreiben und zu erklären, andererseits später auch **formalbezogene Sprachmittel der Wahrscheinlichkeiten** und Sprachmittel des erweiterten Lesewortschatzes, in denen bedingte Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden (vgl. Prediger 2020 zur genaueren Erläuterung der Unterscheidung).

Fachliches (Teil-)Lernziel	Sprachhandlung und dazu notwendige Sprachmittel (wichtigste Satzbausteine kursiv gedruckt)
Baustein A	
Anteile in Aussagen dekodieren und Teil-Ganzes-Beziehungen erfassen	Teil-Ganzes-Beziehungen präzise beschreiben und erklären: (bedeutungsbezogen) <ul style="list-style-type: none"> • Teil und Ganzes beschreiben: ... ist die Teilgruppe/ der Teil; ... ist die ganze Gruppe/ das Ganze • Beziehung beschreiben: ... von... sind... ; davon...; 20% der ... sind ...; Anteil deran ...
Anteile in verschiedenen Darstellungen deuten und Darstellungen vernetzen	Darstellungsvernetzung beschreiben und begründen: (bedeutungsbezogen) <ul style="list-style-type: none"> • Die Fläche ist die ganze Gruppe • Deiktische Mittel, wie: das ... ist hier ... • Das ist die ganze Gruppe, weil ... • Er sagt „der Jugendlichen“, also/ dementsprechend/ das heißt er meint ...
Teil-Ganzes-Beziehungen als Anteile an verschiedenen Ganzen unterscheiden	Unterschiede zwischen Anteilen an unterschiedlichen Ganzen beschreiben und erklären: Sprachmittel für das Ganze: <ul style="list-style-type: none"> • Anteil, der sich auf gesamte Gruppe der Jugendlichen/ Teilgruppe als Ganzes bezieht • Ganze Gruppe ist die gesamte Gruppe/ nur eine Teilgruppe • Erfüllt eine Bedingung/ ist auf ein Merkmal eingeschränkt Sprachmittel für den Teil: <ul style="list-style-type: none"> • Teilgruppe hat ein/ zwei Merkmale; Gruppe erfüllt ein/ zwei Bedingungen • Teilgruppe hat eine weitere Eigenschaft Sprachmittel für Teil-Ganzes-Beziehung: <ul style="list-style-type: none"> • <i>Ein Teil und davon ein Teil; von der gesamten Gruppe ein Teil, von der gesamten Gruppe ein Teil vom Teil</i> • <i>Ein Teil vom Ganzen/ ein Teil vom Teil</i> • Einfache Aussage, kombinierte Aussage, Teil-vom-Teil-Aussage (formalbezogen)
Baustein B	(Baustein wird in 2021 veröffentlicht)
Wahrscheinlichkeiten als Anteile deuten, Zusammenhänge in Wahrscheinlichkeitssprache ausdrücken	Wahrscheinlichkeiten beschreiben (formalbezogen): <ul style="list-style-type: none"> • Ereignis; Bedingung; unter der Bedingung, dass... • Einfache/ kombinierte/ bedingte Wahrscheinlichkeit • Wahrscheinlichkeit, dass eine männliche Person sportlich ist • Wahrscheinlichkeit, dass eine Person sportlich ist, wenn sie männlich ist • Bei einer männlichen Person ist die Wahrscheinlichkeit, dass... Vernetzung von Wahrscheinlichkeit und Anteilen beschreiben und erklären (formal- und bedeutungsbezogen): <ul style="list-style-type: none"> • Die Wahrscheinlichkeit ist eine einfache/ kombinierte/ Teil-von-Teil-Aussage, weil... • „eine zufällige männliche Person“, das heißt, die ganze Gruppe sind ... • Wahrscheinlichkeit ist eine Voraussage zu einer Person, Anteile ist eine Aussage über eine bestimmte Gruppe; Auf Grundlage von Anteilen Voraussagen treffen
Wahrscheinlichkeiten berechnen	Beschreiben von Rechnungen (formalbezogen): <ul style="list-style-type: none"> • Zähler, Nenner • Die obere Zahl durch die untere Zahl teilen

Wichtig sind Sprachmittel, die inhaltliche Vorstellungen adressieren und darauf aufbauen, damit Anteile an verschiedenen Ganzen inhaltlich treffend erklärt sowie unterschieden und die Konzepte später mit den Wahrscheinlichkeiten verknüpft werden können. Unterstützt wird der Vorstellungsaufbau zusätzlich durch das Anteilbild als graphisches Scaffold sowie die explizite Vernetzung der graphischen, sprachlichen, kontextuellen und symbolischen Darstellungsebene.

Das Anteilsbild ist dabei die zentrale graphische Darstellung: Ähnlich wie in der Vier-Felder-Tafel werden in Anteilsbildern die relevanten Merkmale strukturiert dargestellt, die zusätzliche geometrische Umsetzung der ungefähren Zahlbeziehungen stellt jedoch die Verknüpfung zu Rechteckfeldern der unteren Sekundarstufe besser her. Das Anteilsbild kann die Unterscheidung einfacher, kombinierter und bedingter Anteile unterstützen (Eichler & Vogel, 2013).

Keine Visualisierung funktioniert jedoch ohne Versprachlichung. Neben einer expliziten Versprachlichung, wofür die rot markierte Teilgruppe und die blau markierte ganze Gruppe im Anteilsbild steht, ist die explizite Versprachlichung der Teil-Ganzes-Beziehung wichtig. Dazu wird der Anteil herausgezeichnet und mit einer Handbewegung erst die Teilgruppe und dann die ganze Gruppe angedeutet. Dazu wird erklärt, „Der Anteil ist dann dieser Teil von diesem Ganzen“.

Möglicher Sprachspeicher für „Präzises Beschreiben und Bestimmen von Anteilen“

A

Speicherbox A: Präzises Beschreiben und Bestimmen von Anteilen

! Was ist das Ganze?
 • Was ist der Teil?
 Was ist der Anteil?

Drei typische Fragen nach Anteilen und unterschiedlichen Ganzen

Einfache Aussage

Welcher Anteil an allen Jugendlichen ist weiblich?

Kombinierte Aussage

Wie viele von allen Jugendlichen sind männlich und schauen keine Videos?

Teil-vom-Teil-Aussage

Wie viele der Video-Schauer/innen sind weiblich?

(Werte ähnlich aus IIM-Studie 2018)

Teil und Ganzes im Kontext erklären und Anteil bestimmen

Einfache Aussage	Kombinierte Aussage	Teil-vom-Teil-Aussage
Ganze Gruppe (Ganzes): alle Jugendlichen	Ganzes: alle Jugendlichen	Ganzes: die Video-Schauer/innen
Teilgruppe (Teil): die 600 Mädchen	Teil: 400 Jungen, die keine Sport-Videos schauen	Teil: 80 weibliche Video-Schauerinnen
Anteil (Teil-Ganzes-Beziehung): 50% von den Jugendlichen sind weiblich.	Anteil (Teil-Ganzes-Beziehung): $\frac{1}{4}$ aller Jugendlichen sind männlich und schauen keine Videos.	Anteil (Teil-Ganzes-Beziehung): $\frac{2}{7}$ der Video-Schauer/innen sind Mädchen.
Anteilstypen allgemein unterscheiden Von der gesamten Gruppe wird ein Teil genommen. Der Teil hat ein Merkmal.	Von der gesamten Gruppe wird ein Teil genommen und davon noch ein Teil.	Anteil bezieht sich auf eine Teilgruppe als Ganzes. Ein Teil als Ganzes und davon wird ein Teil genommen.
Also: Teil vom Ganzen, der Teil hat 1 Merkmal.	Also: Teil vom Ganzen, der Teil hat 2 Merkmale.	Also: Teil vom Teil.

Weiterführende Literatur und Unterrichtsmaterial

- Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Springer.
- Post, M. & Prediger, S. (2020). „Nur das ‚und‘ ist anders, sonst ist es gleich“. Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten sprachsensibel umgehen. *Mathematik 5-10*, 14(53), 38-41.
- Post, M. & Prediger, S. (2020). Bedingte Wahrscheinlichkeiten – Teil-Ganzes Beziehungen verstehen und unterscheiden. Sprach- und fachintegrierten Unterrichtsmaterial. Open Educational Resources unter sima.dzlm.de/um/9-002
- Prediger, S. (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe - ein forschungsbasiertes Praxisbuch*. Berlin: Cornelsen.

Überblick zu den Aufgaben der Unterrichtseinheit

Baustein	Kompetenz		Aufgaben
	Fachlich	Sprachlich	
A Teil-Ganzes-Beziehungen beschreiben und unterscheiden	Anteile und Anteilsbilder im Kontext deuten	Aufbau beschreiben, Zusammenhang zwischen Anteilsbild und Gruppen im Kontext sowie Brüchen und Gruppen im Kontext beschreiben	1a, b
	Anteilsaussagen dekodieren, Teil-Ganzes-Beziehungen erfassen	Anteilsaussagen, d.h. Teil, Ganzes und Teil-Ganzes-Beziehungen präzise beschreiben	2 3 4a,b
	Darstellungen zu Teil-Ganzes-Beziehungen vernetzen (Aussage, Anteilsbild, Kontext, Symbol, bedbez. Sprache)	Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen erklären	3 4a,b,c
	Zusammenhänge in Anteilsbildern darstellen	Anteilsaussagen formulieren	5a
	Weitere, teils komplexere Anteilsaussagen dekodieren und Teil-Ganzes-Beziehungen erfassen	Teil-Ganzes-Beziehung beschreiben	5b 9
	Teil-Ganzes-Beziehungen als Anteile an verschiedenen Ganzen konkret und abstrahiert unterscheiden	Unterschiede beschreiben, Abgrenzung von Aussagen als Anteile an verschiedenen Ganzen erklären	6 7a, b
B Wahrscheinlichkeiten als Teil-Ganzes-Beziehungen deuten	(wird in 2021 nachgeliefert)		