Mathe sicher können

Didaktischer Kommentar
zum Diagnose- und Fördermaterial

B1 Brüche und Prozente verstehen

Inhalt

Zitierbar als Schink, Andrea, Prediger, Susanne, Wessel, Lena & Böing, Lena (2026). Didaktischer Kommentar zu den Mathe-sicher-können-Diagnose- und Förderbausteinen B1: Brüche und Prozente verstehen. Open Educational Resources unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd/#B1

Hinweis zu verwandtem Material: Dieser Didaktische Kommentar gehört zu dem MSK-Diagnose- und Fördermaterial, das gedruckt beim Cornelsen-Verlag und frei online verfügbar ist. Online finden sich auch Fortbildungsfilme, Erklärvideos und flexible digitale Bruchstreifen für Lernende, unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#B1 bzw. https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html.

B1A Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

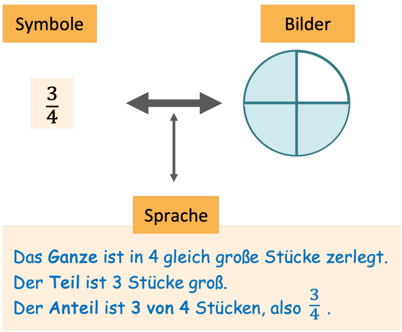
Brüchen begegnen Lernenden bereits im Alltag, doch muss die oberflächliche Vertrautheit erst in tiefgehendes Verständnis ausgebaut werden: Ein Anteil beschreibt eine *Teil-Ganzes-Beziehung:* Er gibt an, welcher Teil von einem Ganzen betrachtet wird, und in welcher Beziehung sie stehen.

Zusammenhang zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen verstehen

Um die Vorstellungen des Anteils als Teil-Ganzes-Struktur aufzubauen, sollen die Lernenden folgende Aspekte erarbeiten:

Bruch als Anteil erfasst Teil-Ganzes-Struktur		
Ganzes einteilen in gleich große Stücke	Für Teil zählt man relevante Stücke	Anteil ist Beziehung vom Teil zum Ganzen
Nenner nennt, in wie viele Stücke Ganzes eingeteilt ist	Zähler zählt, wie viele Stücke markiert sind	Der Bruch mit Zähler und Nenner steht für den Anteil

Damit alle Lernenden verstehen, dass Anteile immer in Bezug zu einem Ganzen und einem Teil interpretiert werden sollen, sollte die Teil-Ganzes-Struktur verstehensorientiert erarbeitet und verinnerlicht werden. Dazu ist es wichtig, tiefgehende Darstellungsvernetzung anzuregen, damit die Teil-Ganzes-Struktur immer wieder versprachlicht wird.



Das Ganze ist in 4 gleich große Stücke zerlegt.
Der Teil ist 3 Stücke groß.
Der Anteil ist 3 von 4 Stücken, also $\frac{3}{4}$.

Tiefgehende Darstellungsvernetzung

Einige Lernende aktivieren auch Verhältnisvorstellungen von Brüchen (1 Stück wird markiert und 3 nicht, also 1/3), die in diesem Kontext nicht tragfähig sind.

Interpretationen des „Anteils von einem Ganzen“ für Stamm- und Nicht-Stammbrüche

Startend mit den Stammbrüchen (d. h. Brüche mit Zähler 1) wird das Anteilsverständnis erarbeitet: Das Ganze wird in gleich große Stücke geteilt, dann gibt der Nenner an, in wie viele gleich große Stücke das Ganze zerlegt wird. Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke im relevanten Teil davon an – er *zählt* also (insbesondere bei Brüchen mit Zähler größer 1). Dass die Stücke gleich groß sein sollen, wird von vielen Lernenden übersehen.

Eine alternative Interpretation für Brüche ist, sie in *Verteilungssituationen* ganzheitlich hineinzusehen: Der Zähler steht dann für das Ganze, das verteilt wird; der Nenner für die Anzahl der Personen, die sich das Ganze gerecht (d. h. jeder bekommt gleich viel) teilen. Der Bruch gibt den Anteil an, den *eine* Person von diesem Ganzen bekommt. Beide Interpretationen sind in Fördereinheit 1 möglich. Die Alternative ist durch ihren Kontextbezug intuitiv zugänglich, kann jedoch beim Übergang zu Nicht-Stammbrüchen (d. h. Brüchen mit Zählern ungleich 1) gerade schwächeren Lernenden Schwierigkeiten bereiten, da in diesem Fall von mehreren Ganzen ausgegangen wird (2/3 bedeutet „3 Leute teilen sich 2 Pizzen“). Deshalb wird sie in Fördereinheit 2 nicht aufgegriffen. Stattdessen werden Nicht-Stammbrüche gemäß dem Anteilsverständnis gedeutet.

Veranschaulichung und Material

Flächige bildliche Darstellungen

Im Förderbaustein wird als flächige bildliche Darstellung das **Rechteck** genutzt. Zwar ist auch der **Kreis** für das Ganze eine prominente und lebensweltlich anknüpfbare Darstellung („Pizza“), er hat jedoch im Gegensatz zur Rechteckdarstellung nur eine begrenzte Reichweite zur Erarbeitung weiterführender Konzepte (z. B. Addition/Multiplikation von Brüchen). Lebensweltlich wird das Rechteck als „Blechkuchen“ gedeutet.

Für die weiteren Bausteine am wichtigsten sind die Bruchstreifen als spezielle flächige Darstellungen, da sie für das Erweitern und Ordnen (Bausteine **B2A**, **B2B**, **B3B**) sowie Addieren/Subtrahieren (**B4**) eine wichtige Rolle spielen.

Auf Kästchenpapier wird weitgehend verzichtet: Der Fokus liegt weniger auf der exakten Darstellung der Anteile durch die Lernenden als auf dem konzeptuellen Verstehen der Zusammenhänge.

Flächige haptische Anschauungsmittel

Neben den rein bildlichen Darstellungen kommen auch Papier zum Falten von Anteilen sowie Bruchpuzzles zum Einsatz, um handlungsorientierte Zugänge zu Brüchen zu ermöglichen:

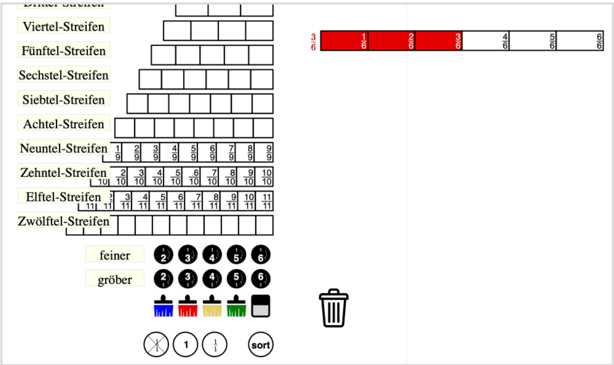
Durch das Falten von Papier können Lernende haptisch erfahren, dass der Anteil umso kleiner wird, je größer der Nenner (bzw. in je mehr Stücke das Ganze zerlegt) ist. Bruchpuzzles ermöglichen es, verschiedene Anteile nachzulegen und zu vergleichen: „1/9 vom Ganzen passt dreimal in das Drittel“ ist dabei eine mögliche Einsicht, die Lernende intuitiv am Material machen können. Darüber hinaus ermöglicht das Bruchpuzzle, zu enge Vorstellungen aufzubrechen: Manche Lernenden verstehen z. B. 1/7 nur als „1 von 7 Stücken". Sind weniger als sieben Stücke markiert (wie in der weißen Fläche rechts unten im Bild), so stehen sie vor der Schwierigkeit, das graue Stück als 1/7 zu deuten. Durch das Auslegen der Fläche mit Puzzleteilen können Strategien entwickelt werden, Anteile richtig zu deuten.

Bruchpuzzle und seine Struktur (aus dem MSK-Materialkoffer)

Die digitalen Bruchstreifen

Mit den digitalen Bruchstreifen lassen sich Anteile flexibel darstellen. Ein Vorteil ist, dass sich viele Anteile leicht und schnell darstellen und verändern lassen. Zudem lassen sich die Brüche aus- und einblenden. Der Teil kann farblich markiert werden. Zusätzlich kann man die Länge des Streifens dynamisch verändern, wodurch die Bedeutung der Länge des Streifens, bzw. die absolute Größe, für die Beziehung zwischen Teil und Ganzem als unerheblich erkannt werden kann. Der Beziehungsaspekt wird so herausgearbeitet. Eine Anleitung zu den Funktionen der digitalen Bruchstreifen finden Sie **bei den Materialien auf der Webseite.**

Digitale Bruchstreifen: dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html



In der Förderung

Bedeutungsbezogene Denksprache

Die Struktur der Beziehung von Teil und Ganzem ist in allen Darstellungen implizit adressiert. Daher ist es wichtig, mit gezielten Impulsen darauf aufmerksam zu machen und immer wieder die Denksprache zu nutzen. Folgende wiederkehrende Impulse dienen dazu, die Strukturen hineinzusehen und die Darstellungsvernetzung anzuregen: Warum passt der Anteil zum Bild? Wo siehst du den Teil (den Zähler) und wo siehst du das Ganze (den Nenner)? Aus wie vielen gleich großen Stücken besteht das Ganze? Wie viele gleich große Stücke sind farblich markiert und bilden den Teil?

Erst durch das sprachliche Explizieren und Einüben der Denksprache durch Lernende erkennen sie diese Bedeutung. Für B1A sind daher Satzbausteine relevant, die die Beziehung verbalisieren, wie zum Beispiel: „Das **Ganze** besteht aus 6 **gleich großen Stücken**. **Davon** markiere ich den **Teil**. Das ist in diesem Fall ein Stück **von** 6 Stücken. Also ist mein **Anteil** 1 **von** 6, 1/6 **von** der ganzen Tafel."

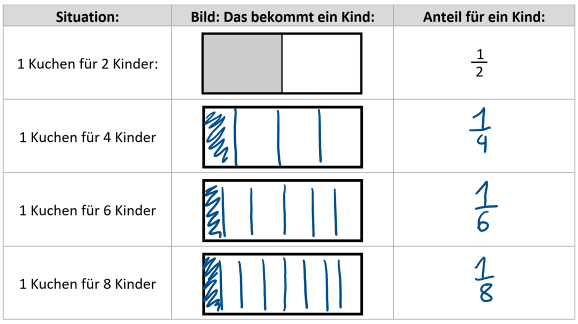
Der Begriff Teil umfasst alle *Stücke*, die markiert sind. So gibt es keine Doppelbelegung des Begriffs „Teil". Weil dieser Begriff eine feste Definition in der Sprachbildung zu Brüchen hat, sollte er auch nicht in abgewandelter Form verwendet werden. Also nicht „In wie viele gleich große **Teile** hast du das Blattpapier gefaltet?", sondern „In wie viele gleich große **Stücke** hast du das Blattpapier eingeteilt/gefaltet?"

Auch der Begriff „Anteil" hat eine feste Bedeutung: Der Anteil kann nicht angemalt werden, da dieser die Beziehung vom Teil zum Ganzen darstellt. Nur **Stücke** oder der **Teil** (der aus den entsprechenden Stücken oder hier dem Stück besteht) kann angemalt werden.

Aufbau der Förderung

Der Baustein beginnt in **Fördereinheit 1 (Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen)** mit der Erarbeitung des Anteils von einem Ganzen mit Stammbrüchen. Dabei wird der Anteil inhaltlich in *Kuchen-Verteilungs-Situationen* gedeutet und der Zusammenhang von Nenner und Größe des Teils bzw. Anteils erarbeitet: Sowohl durch das Falten von Papier als auch über operative Bilderfolgen wird die Auswirkung der Veränderung des Nenners bei gleichbleibendem Zähler und Ganzen auf den Teil und den Anteil untersucht.

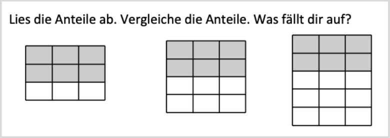
Aufgabe 1.1: Operatives Erarbeiten der Bedeutung des Nenners



Situation:	Bild: Das bekommt ein Kind:	Anteil für ein Kind:
1 Kuchen für 2 Kinder:		$\frac{1}{2}$
1 Kuchen für 4 Kinder		$\frac{1}{4}$
1 Kuchen für 6 Kinder		$\frac{1}{6}$
1 Kuchen für 8 Kinder		$\frac{1}{8}$

Im weiteren Verlauf werden die Vorstellungen zum Anteil und dem Zusammenhang zwischen ihm, dem Teil und dem Ganzen durch Variationen des Ganzen erweitert sowie die Begrifflichkeiten erarbeitet. Dazu dienen Aufgabenvariationen, wie in Aufgabe 1.2 und 2.4.

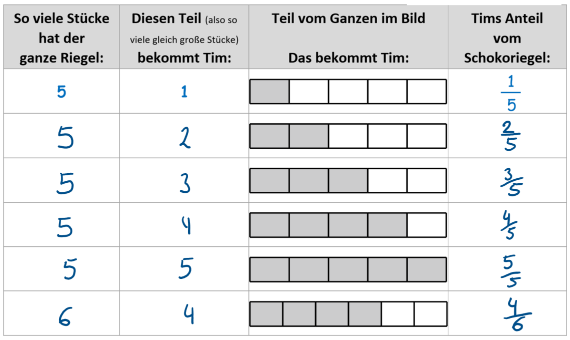
Aufgabe 2.4: Wenn der Teil gleich groß bleibt und das Ganze größer wird, dann wird der Anteil kleiner (ähnlich Aufgabe 1.4)


Lies die Anteile ab. Vergleiche die Anteile. Was fällt dir auf?

Um die Relevanz herauszuarbeiten, dass die Ganzen stets in gleich große Stücke zerlegt werden sollen, wird das Bruchpuzzle herangezogen: Der Nenner nennt nur dann die Anzahl der Stücke, wenn das Ganze gleich zerlegt ist, bei ungleichmäßiger Zerlegung nicht (z. B. „1/4 bleibt 1/4 vom Ganzen, auch wenn der Rest nur aus einem Stück besteht.“).

Fördereinheit 2 (Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen) zur Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen hat einen zu Fördereinheit 1 analogen Aufbau und knüpft an die Erfahrungen aus dieser an. Hier wird zunächst die Rolle des Zählers (bei gleichbleibendem Nenner und Ganzen) erarbeitet, bevor dann ebenfalls Aufgaben zur Systematisierung und zum Üben folgen.

Aufgabe 2.1: Zähler zählt die Stücke im Teil



So viele Stücke hat der ganze Riegel:	Diesen Teil (also so viele gleich große Stücke) bekommt Tim:	Teil vom Ganzen im Bild Das bekommt Tim:	Tims Anteil vom Schokoriegel:
5	1	▨☐☐☐☐	$\frac{1}{5}$
5	2	▨▨☐☐☐	$\frac{2}{5}$
5	3	▨▨▨☐☐	$\frac{3}{5}$
5	4	▨▨▨▨☐	$\frac{4}{5}$
5	5	▨▨▨▨▨	$\frac{5}{5}$
6	4	▨▨▨▨☐☐	$\frac{4}{6}$

Digitale Medien zum Baustein

Alle digitalen Medien werden kontinuierlich ausgebaut und sind stets aktuell verlinkt unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#b1

- Mit den **digitalen Bruchstreifen** werden Anteile visualisiert. So wird der Vorstellungsaufbau unterstützt.
  https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html
- Mit den **Erklärvideos** lassen sich die erarbeiteten Inhalte mit den Kindern systematisieren.
  1) Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=690
  2) Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=691
- In den **didaktischen Themenfilmen** werden die aufgeführten Aspekte zum Anteilsverständnis mit Fallbeispielen illustriert und es wird aufgezeigt, worauf es bei der Förderung ankommt (nach Registrierung zugänglich):
  B1-B3: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/themenvideo/brueche1
- Die digitale Diagnose wird in zunehmend mehr Bundesländern im **MSK-Online-Check** möglich.

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. Mathematik lehren 123, 4–8.

Padberg, F. & Wartha, S. (2023). Didaktik der Bruchrechnung Springer Spektrum.

Prediger, S., & Schink, A. (2014). Verstehensgrundlagen aufarbeiten im Mathematikunterricht – fokussierte Förderung statt rein methodischer Individualisierung. *Pädagogik*, *66*(5), 21–25.

Winter, H. (1999). Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. Manuskript. Online. Aachen. http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf

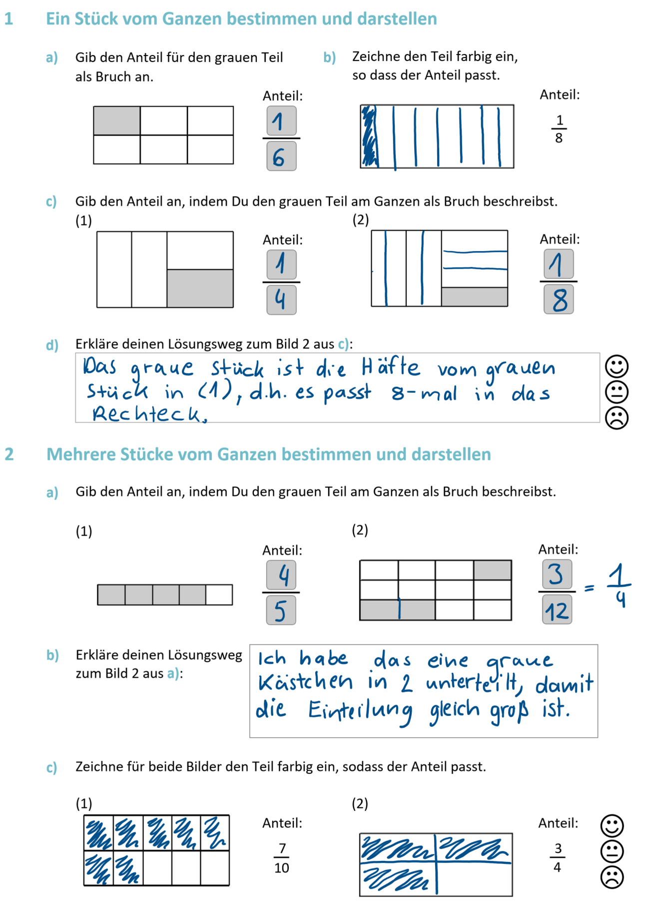
B1A Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 20-30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Manche Lernende haben Hemmungen, ihr Vorgehen schriftlich zu beschreiben (vor allem 1 d) und 2 b)). Oft hilft es schon sie zu motivieren, ihre Ideen so aufzuschreiben, wie sie sie denken.
Um Vorstellungen nicht zu verfälschen, ist es sinnvoll, keine Formulierungsvorschläge zu machen.

Wenn Lernende in 1 c) irritiert sind, weil sie in beiden Bildern den Anteil 1/4 ablesen („Da kommt beide Male derselbe Anteil raus, aber das Bild sieht anders aus?“), auffordern, ihre Schwierigkeiten mit der Aufgabe zu notieren.



1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib den Anteil für den grauen Teil als Bruch an. Anteil: 1/6

b) Zeichne den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. Anteil: 1/8

c) Gib den Anteil an, indem Du den grauen Teil am Ganzen als Bruch beschreibst.
(1) Anteil: 1/4
(2) Anteil: 1/8

d) Erkläre deinen Lösungsweg zum Bild 2 aus c):
Das graue Stück ist die Häfte vom grauen Stück in (1), d.h. es passt 8-mal in das Rechteck.
☺ 😐 ☹

2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

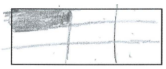
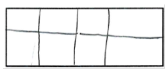
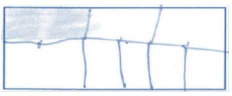
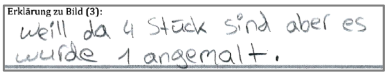
a) Gib den Anteil an, indem Du den grauen Teil am Ganzen als Bruch beschreibst.
(1) Anteil: 4/5
(2) Anteil: 3/12 = 1/4

b) Erkläre deinen Lösungsweg zum Bild 2 aus a):
Ich habe das eine graue Kästchen in 2 unterteilt, damit die Einteilung gleich groß ist.

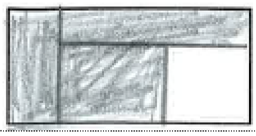
c) Zeichne für beide Bilder den Teil farbig ein, sodass der Anteil passt.
(1) Anteil: 7/10
(2) Anteil: 3/4
☺ 😐 ☹

Hinweise zur Auswertung

Diagnoseaufgabe 1: Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a), b), c.1)	$\frac{1}{5},\frac{5}{1}/\frac{1}{3},\frac{3}{1}$ 	Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben.	(Wieder-)Erarbeitung der Anteilsvorstellung in 1.1 - 1.4, danach weitere Aufgaben zur Systematisierung, insbesondere 1.5. Bei b) Zeichenungenauigkeiten berücksichtigen.
b)		8 Felder ohne Markierung: Flüchtigkeitsfehler oder problematische Gleichsetzung mit „geachteltem Ganzen".	
b), c), d)	 $\frac{1}{4}$  Erklärung zu Bild (3): weill da 4 Stück sind aber es wurde 1 angemalt.	Größe der Stücke wird nicht beachtet.	
c.2)	z. B. $\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}$	Vermutlich richtige Idee, dass es auf Größe der Stücke ankommt. Schwierigkeiten beim Abschätzen.	Mündlich nachfragen. Ggf. üben mit 1.6.
c.2), d)	keine Angabe	Anteil kann bei *schwierigerer* Aufteilung nicht abgelesen werden. Irritation wegen c) (1).	Überprüfen, ob Schwierigkeit in der Strukturierung des Ganzen liegt, dann 1.6 bearbeiten.

Diagnoseaufgabe 2: Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a.1), a.2)	$\frac{1}{4},\frac{4}{1}$ $\frac{3}{9},\frac{9}{3}$	Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben (z. T. bei Nichtberücksichtigung der Größe der Stücke).	Ggf. (Wieder-)Erarbeitung der Anteilsvorstellung in 1.1 - 1.4, danach weitere Aufgaben zur Systematisierung, insbesondere 1.5 sowie 2.1 - 2.4 zur Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen.
a.2), c.2)	$\frac{2}{11}$ 	Nichtberücksichtigung der Größe der Stücke.	Ggf. Flexibilisierung des Zusammenhangs von Teil und Ganzem in 1.6. Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen (2.1 - 2.4). Danach Systematisierung und Flexibilisierung des Zusammenhangs von Teil und Ganzem auch bei Nicht-Stamm-brüchen (2.5; 2.6). Zeichenungenauigkeiten berücksichtigen.
b)	z. B. „Ich kann das nicht rechnen, weil 2 Kästchen zusammen sind."	Schwierigkeiten, mit unterschiedlicher Größe der Stücke umzugehen.	

B1A Wie können wir fördern, Anteile von einem Ganzen zu bestimmen und darzustellen?

1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

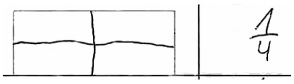
1.1 Erarbeiten

Ziel: Stammbrüche im Kontext des gerechten Verteilens eines Ganzen bestimmen und darstellen

Material: Papier zum Falten der Anteile

Umsetzung: a) UG, dann EA, b) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile handlungsorientiert kennenlernen und sie dann zeichnerisch darstellen.
Dabei erkunden sie die Zusammenhänge und lernen das Rechteckfeld als eine Form der Bruchdarstellung kennen. Wichtig ist die Erkenntnis, dass jedes Ganze immer in gleich große Stücke eingeteilt ist.
Eine typische Schwierigkeit ist, dass Lernende nicht den Teil markieren, sondern nur die Zerteilung (d. h. für 1/4 werden 4 Stücke eingezeichnet, aber keines wird markiert / ausgemalt):

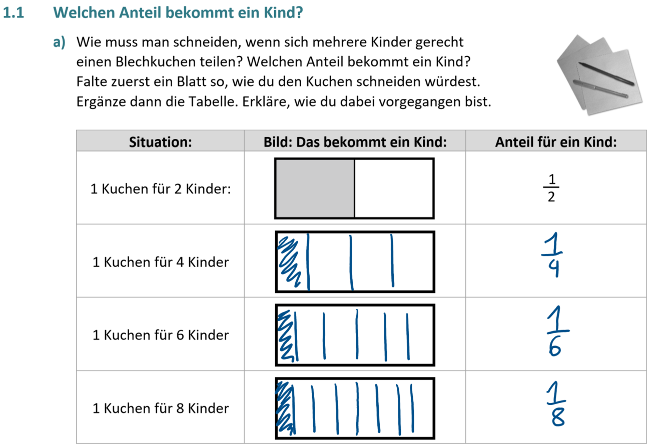


Im Unterrichtsgespräch ist die Thematisierung der operativen Veränderung (siehe b)) wichtig.

Methode:
Es ist wichtig zu klären, dass „gerecht“ bedeutet, dass jeder gleich viel bekommt.
Zeichenungenauigkeiten ansprechen, aber Verständnis unterordnen

Impulse:

- Ich sehe 0/4, 0/6 etc. (wird in 1.5 aufgegriffen)
- Wo siehst du 1/4? Wo siehst du die 1 im Bild (Zähler)? Wo die 4 (Nenner)?
- In wie viele gleich große **Stücke** hast du das Blattpapier eingeteilt/gefaltet?
- Ich würde mir dieses (größtes der jeweils gezeichneten Stücke) Stück aussuchen.

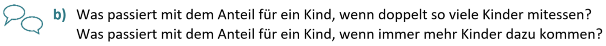


1.1 Welchen Anteil bekommt ein Kind?

a) Wie muss man schneiden, wenn sich mehrere Kinder gerecht einen Blechkuchen teilen? Welchen Anteil bekommt ein Kind? Falte zuerst ein Blatt so, wie du den Kuchen schneiden würdest. Ergänze dann die Tabelle. Erkläre, wie du dabei vorgegangen bist.

Situation:	Bild: Das bekommt ein Kind:	Anteil für ein Kind:
1 Kuchen für 2 Kinder:		$\frac{1}{2}$
1 Kuchen für 4 Kinder		$\frac{1}{4}$
1 Kuchen für 6 Kinder		$\frac{1}{6}$
1 Kuchen für 8 Kinder		$\frac{1}{8}$

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die operativen Zusammenhänge beschreiben. Dabei wird die Größe des Anteils mit der Kuchenmenge pro Kind verknüpft: Mehr Kinder, weniger Kuchen, also kleinerer Anteil.
Hier kann folgende Fehlvorstellung aufgegriffen werden: „Je größer der Nenner, desto größer der Anteil.“



b) Was passiert mit dem Anteil für ein Kind, wenn doppelt so viele Kinder mitessen?
Was passiert mit dem Anteil für ein Kind, wenn immer mehr Kinder dazu kommen?

1.2 Erarbeiten

Ziel: Stammbrüche ablesen; Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem erkennen und beschreiben

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) UG

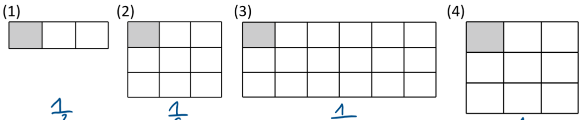
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem erkennen und beschreiben. Dabei knüpfen sie an die vorherige Aufgabe an.

Methode:
Werden Zähler und Nenner nicht tragfähig gedeutet, kann zunächst zu 1.3 gewechselt und Fachbegriffe geklärt werden. Bei Schwierigkeiten können die Lernende dazu aufgefordert werden, alles zu beschreiben, was sie entdecken.

Lösung zu b):
Entdeckbare Muster: 1 nach 4: Teil gleich, Ganzes größer, Anteil kleiner (Quantifizierung nicht notwendig). 2 nach 3: Teil gleich, Ganzes größer, Anteil kleiner. 2 nach 4: anderer Teil, anderes Ganzes, aber dennoch gleicher Anteil.

1.2 Anteile von verschiedenen Kuchen

a) Hier sind verschiedene Kuchen. Die Kinder bekommen immer das graue Stück. Welcher Anteil vom ganzen Kuchen ist das jeweils?



(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{18}$ (4) $\frac{1}{9}$

b) Vergleiche Bild (1) und Bild (2) aus **a)**.
Der Teil im Bild ist gleich groß, das Ganze wird größer. Was ist mit dem Anteil?
Vergleiche auch die anderen Bilder. Welche Muster kannst du finden?

c) Vergleiche auch Bild (2) und Bild (4) aus **a)**.
Das Ganze hat gleich viele Stücke, aber es ist unterschiedlich groß gezeichnet.
Was ist mit dem Anteil?

1.3 Erarbeiten

Ziel: Fachbegriffe und ihre konzeptuelle Bedeutung erarbeiten

Material: Bruchbegriffe; Erklärvideo

Umsetzung: a) EA, b) PA, dann UG

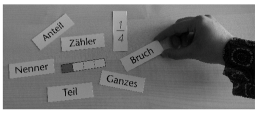
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Fachbegriffe und ihre konzeptuelle Bedeutung erarbeiten. Dabei geht es nicht nur um einzelne Worte wie Anteil, Teil und Ganzes, sondern um ganze Satzbausteine.
Anteil ist ein schwieriger Begriff, da er die Beziehung zwischen Teil und Ganzem herstellt. Er sollte auch an die Deutung im Kuchenkontext angebunden werden (1.1).

Methode:
Kärtchen später immer wieder aufgreifen.
Bei Zuordnungsschwierigkeiten können auch weitere Stammbruch-Anteile zur Verdeutlichung betrachtet werden.

Erklärvideo:
Das Erklärvideo „Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen“ dient zur Vertiefung oder Sicherung und Systematisierung des bereits Gelernten und greift die wichtigsten Aspekte auf, die zum Verstehen der Beziehung vom Teil zum Ganzem als Anteil zentral sind.
https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=690

1.3 Was hat der Bruch mit dem Bild zu tun?

a) Sortiere die Kärtchen:
Welche Begriffe gehören zum Bruch und zum Bild?
Schreibe den Text ab und ergänze die fehlenden Begriffe und Angaben.



Der Bruch beschreibt den Anteil. Hier: 1/4
Im Nenner steht, in wie viele gleich große Stücke das Ganze geteilt wurde. Hier: 4
Im Zähler steht, wie viele Stücke zum Teil gehören. Hier: 1

b) Schaut nun das Erklärvideo und erklärt danach noch einmal mit den Wörtern und Satzbausteinen aus **a)**.

B1A1

mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=690

1.4 Üben

Ziel: Stammbrüche bestimmen und darstellen;
Operative Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil, Ganzem vertiefen

Material: -

Umsetzung: a), b), c) EA, dann UG, d) UG, e) Aufgabengenerator (PA)

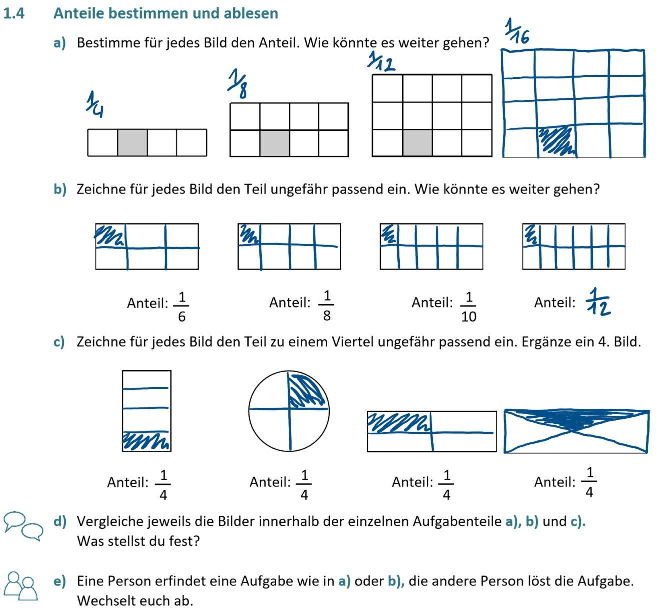
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Stammbrüche bestimmen und darstellen und die operativen Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil, Ganzem vertiefen. In Aufgabenteil a) verändert sich das Ganze, in b) die Anzahl die Stücke und in c) die Form des Ganzen.
Das Beschreiben der Muster ist hier wichtiger als die exakte Fortführung.

Methode:
Verschiedene Bilder der Lernenden vergleichen. Zeichenungenauigkeiten ansprechen (Ich würde mir dieses Stück aussuchen.), aber dem Verständnis unterordnen.

Impulse:
- Was passiert mit dem Ganzen?
- Wie verändert sich der Anteil? Warum?
- Es ist immer ein Stück markiert. Warum sind es trotzdem verschiedene Anteile?

Lösung zu d):
Operatives Muster in a): Ganzes wird größer, Teil bleibt gleich, d. h. Anteil wird kleiner.
Operatives Muster in b): Ganzes bleibt gleich, Anteil wird kleiner, d. h. Teil wird kleiner. (Zu beachten: Wird ein anderer Anteil ergänzt, dieses Muster thematisieren lassen.)
Operatives Muster in c): Gleicher Anteil kann bei unterschiedlichen Ganzen anders aussehen.

Reflexion:
Bei eigenen Bildern eventuelle „ungerechte“ Verteilungen als Lernchance nutzen und diskutieren.



1.4 Anteile bestimmen und ablesen

a) Bestimme für jedes Bild den Anteil. Wie könnte es weiter gehen?

b) Zeichne für jedes Bild den Teil ungefähr passend ein. Wie könnte es weiter gehen?

Anteil: $\frac{1}{6}$ Anteil: $\frac{1}{8}$ Anteil: $\frac{1}{10}$ Anteil: $\frac{1}{12}$

c) Zeichne für jedes Bild den Teil zu einem Viertel ungefähr passend ein. Ergänze ein 4. Bild.

Anteil: $\frac{1}{4}$ Anteil: $\frac{1}{4}$ Anteil: $\frac{1}{4}$ Anteil: $\frac{1}{4}$

d) Vergleiche jeweils die Bilder innerhalb der einzelnen Aufgabenteile **a), b)** und **c).**
Was stellst du fest?

e) Eine Person erfindet eine Aufgabe wie in **a)** oder **b),** die andere Person löst die Aufgabe. Wechselt euch ab.

1.5 **Erarbeiten**

Ziel: Stammbruch in Bild und Situation deuten; Fehlvorstellungen zu Stammbrüchen thematisieren

Material: -

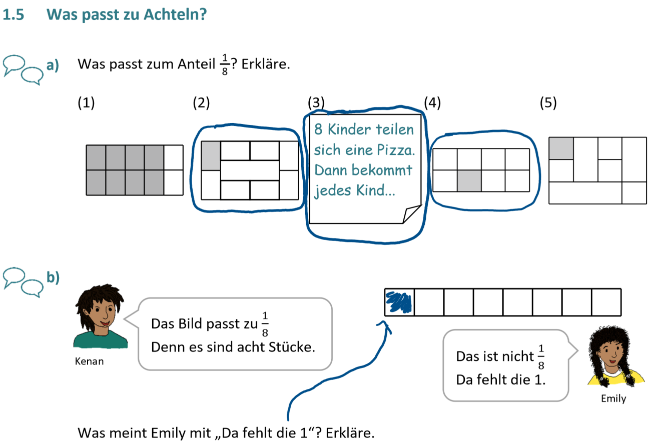
Umsetzung: a) EA, dann UG, b) PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Stammbrüche in Bildern und Situation deuten. Dabei werden auch Fehlvorstellungen zu Stammbrüchen thematisiert. Wichtig ist, Lernende auch erläutern zu lassen, warum die anderen Bilder nicht passen. Lernende können miteinander aushandeln, auf welches Ganze sie gucken.

Methode:
Bei Schwierigkeiten mit (1) auf 1.1 und 1.3 zurückgreifen. Lernende, die (5) als richtig deuten („Weil da 8 Stücke sind und eines markiert ist.“), finden Systematisierung und Abgrenzung in 1.7.

Lösung zu a):
1/8 passt zu (2), wenn Inneres nicht mitgezählt wird. (3) Mit Hinweis auf gerechtes Teilen. (4) Ohne Einschränkung.

Impulse:
- Was hat sich Kenan wohl gedacht?
- Wie würdest du ihm erklären, warum seine Lösung noch nicht stimmt?
- „Ich sehe da 0/8“
- Wo siehst du die 1 im Bruchstreifen, wo die 8?


1.5 Was passt zu Achteln?

a) Was passt zum Anteil $\frac{1}{8}$? Erkläre.

(1) (2) (3) (4) (5)

8 Kinder teilen sich eine Pizza. Dann bekommt jedes Kind...

b)

Kenan: Das Bild passt zu $\frac{1}{8}$
Denn es sind acht Stücke.

Emily: Das ist nicht $\frac{1}{8}$
Da fehlt die 1.

Was meint Emily mit „Da fehlt die 1“? Erkläre.

1.6 Erarbeiten

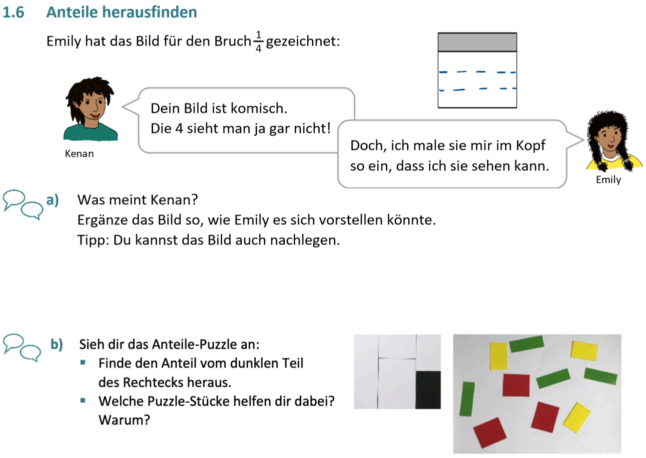
Ziel: Anteile als Beziehung zwischen Teil und Ganzem deuten;
Verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt;
Komplexere Anteile im Bild bestimmen lernen

Material: Bruchpuzzle, Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile als Beziehung zwischen Teil und Ganzem deuten und verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt. Dazu sollen sie selbstständig Formen (um-)strukturieren und komplexere Anteile im Bild bestimmen.

Methode:
Das Bruchpuzzle hilft, die fehlende Einteilung des Ganzen und damit den Anteil 1/4 doch zu sehen: Das ganze Rechteck kann mit gleich großen Puzzleteilen ausgelegt werden.
Das Beispiel im Kuchenkontext hilft zu verstehen, dass die Einteilung vom Rest nicht relevant ist: Wenn du 1/4 von einem Kuchen bekommen sollst, dann ist es für dich egal, ob der Rest 1, 2, 3 oder noch mehr Stücke hat.
Lernende können auch erst Vermutungen anstellen. Schwächeren Lernenden kann der Anteil wie in a) *verraten* werden, um Vertrauen in Strategie und Ergebnis zu gewinnen. Manche Lernende bekommen je nach Puzzle-methode verschiedene Anteile als Ergebnis heraus – das sollte zu einem kognitiven Konflikt führen.
Eine weitere Aufgabe könnte ein intuitiver Größen-vergleich der Puzzleteile sein: grün ist 1/2 von schwarz. Wie viele Stücke braucht man mehr, um das Ganze damit auszulegen? → 7 (Man braucht doppelt so viele Stücke.)



1.6 Anteile herausfinden

Emily hat das Bild für den Bruch $\frac{1}{4}$ gezeichnet:

Kenan: Dein Bild ist komisch.
Die 4 sieht man ja gar nicht!

Emily: Doch, ich male sie mir im Kopf
so ein, dass ich sie sehen kann.

a) Was meint Kenan?
Ergänze das Bild so, wie Emily es sich vorstellen könnte.
Tipp: Du kannst das Bild auch nachlegen.

b) Sieh dir das Anteile-Puzzle an:
- Finde den Anteil vom dunklen Teil des Rechtecks heraus.
- Welche Puzzle-Stücke helfen dir dabei? Warum?

2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

2.1 Erarbeiten

Ziel: Nicht-Stammbrüche operativ erarbeiten; Fachbegriffe und ihre Bedeutung erarbeiten

Material: Bruchbegriffe; Erklärvideo

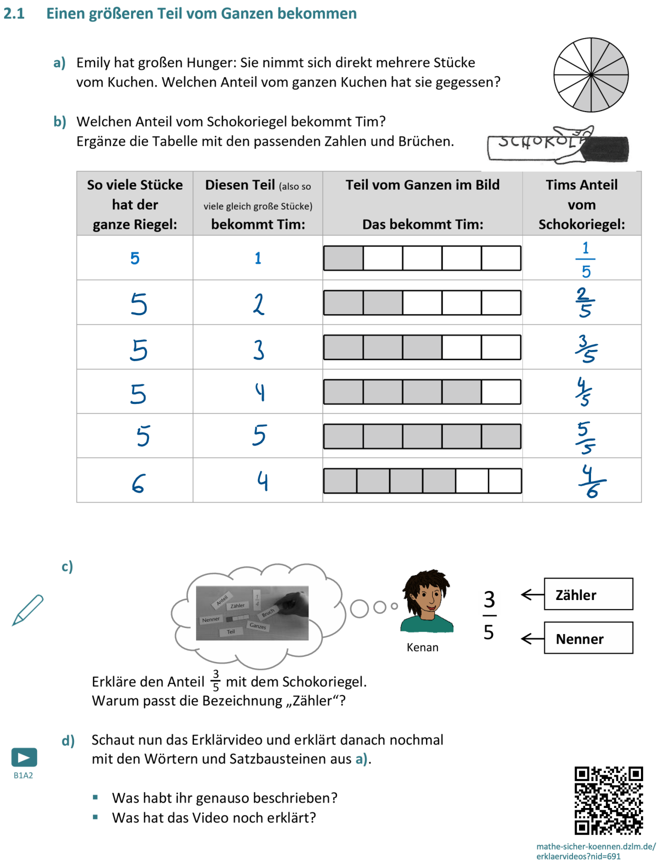
Umsetzung: a) UG; b) EA; c) EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen erarbeiten, dass der Teil aus mehreren Stücken bestehen kann. Dabei nutzen sie die Fachbegriffe und verstehen deren Bedeutung.
Schokoriegel dienen als außermathematischer Vorstellungsanker für die, für Lernende u.U. ungewohntere, Darstellung von Anteilen in Bruchstreifen, die später erneut aufgegriffen wird.
Die Aufgabe bereitet operativ vor, dass der Zähler die Anzahl der Stücke *zählt* (siehe c)).
Eine Schwierigkeit könnte sein, dass Lernende, die Fördereinheit 1 nicht bearbeitet haben, Anteile möglicherweise als „Zähler steht für die Anzahl der Kuchen, die verteilt werden und Nenner steht für die Anzahl der Kinder, die ihn sich teilen." deuten (*Interpretation 1* unter *Lerninhalt*). Sie deuten hier „1 Schokoriegel wird an 5 Kinder verteilt. Welchen Anteil bekommt jedes Kind?". Falls das der Fall ist, kann 1.3 bearbeitet werden, um hier genutzte *Interpretation 2* zu erarbeiten.
Der Bruchstreifen im letzten Bild hat 6 Stücke, dies kann leicht übersehen werden.

Methode:
Begriffe aus 1.3 für 3/5 (d. h. Nicht-Stammbruch) mithilfe der Karten thematisieren. Ggf. 1.3 wiederholend bearbeiten.

Lösung zu c):
Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Stücke man den Schokoriegel schneidet – hier 5. Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke an, die man bekommt – hier 3. Die Bezeichnung passt, weil der Zähler die Stücke *zählt*.

Erklärvideo:
Das Erklärvideo „Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen" dient zur Vertiefung oder Sicherung und Systematisierung des bereits Gelernten und greift die wichtigsten Aspekte auf, die zum Verstehen der Beziehung vom Teil zum Ganzem als Anteil zentral sind.
https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=691



2.1 Einen größeren Teil vom Ganzen bekommen

a) Emily hat großen Hunger: Sie nimmt sich direkt mehrere Stücke vom Kuchen. Welchen Anteil vom ganzen Kuchen hat sie gegessen?

b) Welchen Anteil vom Schokoriegel bekommt Tim?
Ergänze die Tabelle mit den passenden Zahlen und Brüchen.

So viele Stücke hat der ganze Riegel:	Diesen Teil (also so viele gleich große Stücke) bekommt Tim:	Teil vom Ganzen im Bild Das bekommt Tim:	Tims Anteil vom Schokoriegel:
5	1	▨□□□□	$\frac{1}{5}$
5	2	▨▨□□□	$\frac{2}{5}$
5	3	▨▨▨□□	$\frac{3}{5}$
5	4	▨▨▨▨□	$\frac{4}{5}$
5	5	▨▨▨▨▨	$\frac{5}{5}$
6	4	▨▨▨▨□□	$\frac{4}{6}$

c)

Erkläre den Anteil $\frac{3}{5}$ mit dem Schokoriegel.
Warum passt die Bezeichnung „Zähler"?

d) Schaut nun das Erklärvideo und erklärt danach nochmal mit den Wörtern und Satzbausteinen aus a).

- Was habt ihr genauso beschrieben?
- Was hat das Video noch erklärt?

B1A2

mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=691

2.2 - 2.3 **Erarbeiten und Üben**

Ziel: Nicht-Stammbrüche darstellen

Material: Digitale Bruchstreifen (oder notfalls Streifentafel)

Umsetzung: 2.2 a), b) EA, c) Aufgabengenerator (PA); 2.3 EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile flexibel in bildliche Darstellungen übertragen und dabei ihr Wissen zu Anteilen vertiefen und reflektieren. Dabei üben sie, verschiedene Anteile bildlich darzustellen und die Passung zur symbolischen Schreibweise explizit zu versprachlichen. Außerdem untersuchen sie die Auswirkung der Veränderung der Länge des Bruchstreifens. Dabei sollen sie erkennen, dass sich der Anteil 4/7 nicht ändert, auch wenn sie die Größe des Ganzen variieren.

Die digitalen Bruchstreifen:
Die digitalen Bruchstreifen unterstützen die flexible Darstellung der Anteile und machen sichtbar, dass die Länge des Bruchstreifens sich nicht auf den Anteil auswirkt Es kommt nämlich immer auf die Beziehung zwischen Teil und Ganzem an und diese Beziehung verändert sich nicht, wenn der Streifen länger oder kürzer wird.
https://vam.dzlm.de/vams/apps/msk/bruchstreifen.html

Impulse:
- Warum passt 3/5 zu deinem Bruchstreifen?
- Wo siehst du die 3, wo siehst du die 5 im Bruchstreifen?
- Wie siehst du 2/8?

Denksprache:
- Das **Ganze** besteht aus … **gleich großen Stücken**.
- **Davon** markiere ich den **Teil**.
- Also ist mein **Anteil** … **von** …

2.2 Anteile in Bruchstreifen markieren

a) Nutze die digitalen Bruchstreifen zur Bearbeitung der Aufgabe:
Stelle $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{8}$ an zwei Bruchstreifen dar. Überlege dazu:
- Welchen Bruchstreifen wählst du warum aus?
- Wie viele Stücke markierst du? Warum?

Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

b) Stelle den Anteil $\frac{4}{7}$ in einem passenden Bruchstreifen dar.
Was passiert mit dem Anteil, wenn du die Länge des Bruchstreifens veränderst?

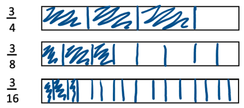
c) Stellt euch gegenseitig Aufgaben mit dem digitalen Bruchstreifen: Eine Person stellt eine Aufgabe wie in **a)** oder **b)**, die andere Person löst die Aufgabe. Wechselt euch ab.

Lösung:
An den Brüchen und Bildern zu sehen: Ganzes bleibt gleich, Zähler bleibt gleich, Nenner wird größer (nämlich immer doppelt so groß), d. h. Anteil wird kleiner, Teil wird kleiner, es sind immer 3 Stücke/Felder markiert.

Impulse:
- Ich habe immer 3 Stücke/Felder. Aber die sind irgendwie nicht gleich groß. Warum?
- Wie sollte mein Anteil aussehen, wenn ich möglichst viel vom Bruchstreifen bekommen möchte?

2.3 Anteile einzeichnen

Zeichne auf Papier oder mit digitalen Bruchstreifen aus **2.2** den Anteil ein.
Vergleiche die Brüche und Bilder miteinander.



2.4 Üben

Ziel: Anteile ablesen; Muster erkennen und weiterführen;
Erkennen, dass der gleiche Anteil unterschiedlich aussehen kann

Material: -

Umsetzung: a), b) EA, dann UG, c) PA, d) UG, e) EA

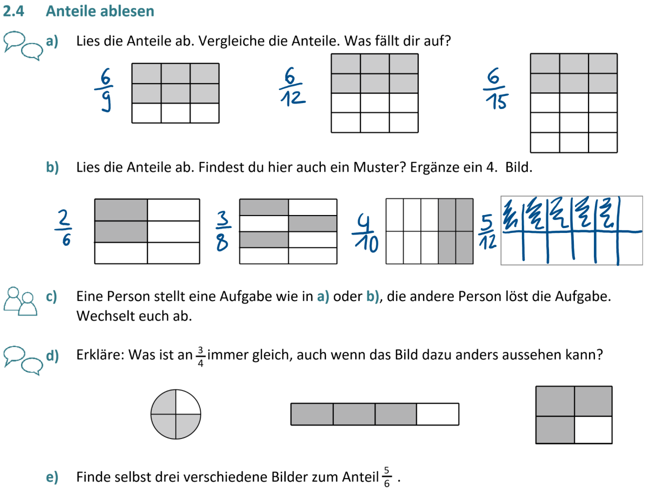
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile ablesen und Muster entdecken. Dabei sollen sie erkennen, dass der gleiche Anteil unterschiedlich aussehen kann.

Impuls:
- Wie viele Stücke sind markiert? Wie viele Stücke hat das Ganze?
- Was verändert sich vom 1. zum 2. / vom 2. zum 3. Bild?

Lösung zu a):
Operatives Muster: Ganzes wird größer, Teil bleibt gleich, Anteil wird kleiner.

Lösung zu b):
Operatives Muster: Zähler wird immer um 1 größer, Nenner wird um 2 größer, Anteil wird größer, doch wenn das Ganze unterschiedlich ist, kann man auch über den Teil nichts sagen.

Impuls zu d):
- Wo siehst du die 3 und wo die 4?
- Warum passt 3/4 zu allen drei Bildern?
(Die Ganzen sind zwar unterschiedlich, aber sind alle in 4 gleich große Stücke eingeteilt und drei davon sind gefärbt, also immer 3/4.)
- Was ist gleich in den Bildern? (Das Ganze ist immer in 4 gleich große Stücke geteilt und es sind immer 3 Stücke markiert.)
- Was ist anders in den Bildern? (Form/Größe des Ganzen)



2.4 Anteile ablesen

a) Lies die Anteile ab. Vergleiche die Anteile. Was fällt dir auf?

$\frac{6}{9}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{6}{15}$

b) Lies die Anteile ab. Findest du hier auch ein Muster? Ergänze ein 4. Bild.

$\frac{2}{6}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{5}{12}$

c) Eine Person stellt eine Aufgabe wie in a) oder b), die andere Person löst die Aufgabe. Wechselt euch ab.

d) Erkläre: Was ist an $\frac{3}{4}$ immer gleich, auch wenn das Bild dazu anders aussehen kann?

e) Finde selbst drei verschiedene Bilder zum Anteil $\frac{5}{6}$.

2.5 **Erarbeiten**

Ziel: Bedeutung der Größe der Stücke erfassen

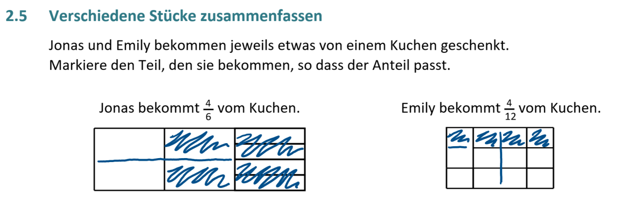
Material: -

Umsetzung: EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Bedeutung der Größe der Stücke verstehen und Stücke zusammenfassen und neu einteilen können.

Impulse:
- Wo siehst du die 4 im Rechteck? Wo siehst du die 6?
- Sind auch andere Einteilungen möglich?
- Können für den Anteil auch zwei große und zwei kleine Stücke markiert werden?

Methode:
Bei Schwierigkeiten Aufgabe 2.6 vorziehen. Alternative Strukturierungen thematisieren.



2.5 Verschiedene Stücke zusammenfassen

Jonas und Emily bekommen jeweils etwas von einem Kuchen geschenkt.
Markiere den Teil, den sie bekommen, so dass der Anteil passt.

Jonas bekommt $\frac{4}{6}$ vom Kuchen.

Emily bekommt $\frac{4}{12}$ vom Kuchen.

2.6 Erarbeiten

Ziel: Anzahl und Größe von Stücken in Relation setzen; Komplexere Anteile in Bildern bestimmen

Material: Bruchpuzzle (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer), Folienstifte

Umsetzung: a) UG, b) EA, c) UG; d) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Struktur des Anteils als Beziehung zwischen Teil und Ganzem in Bilder hineinsehen und verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt. Dazu bestimmen sie komplexe Anteile flexibel in bildliche Darstellungen und mit dem Bruchpuzzle und strukturieren dabei verschieden Formen um.

Methode:
Bedeutung von Nenner und Zähler thematisieren (siehe 2.1), dann für Strategien auf 1.6 zurückgreifen. Auch nach alternativen Strukturierungen zum Erkennen des Anteils fragen.

Impulse zu b):

- Wo siehst du den Teil (Zähler) im Bruchpuzzle? Wo siehst du das Ganze (den Nenner)?
- Wie oft passt ein Stück in das Ganze?
- Wie viele gleich große Stücke siehst du im Ganzen?
- Stelle dir im Kopf vor: Wie oft passt das grüne in das schwarze Stück?

Hinweise zum Bruchpuzzle:
Mit dem Puzzle kann man alle Bilder nachlegen. Die Bilder (4) bis (7) werden ohne Grundfläche gelegt: Variation und Systematisierung der Strategie des geeigneten Strukturierens. Es können in (4) bis (7) Anteile für beide Puzzle-Stücke angegeben werden.

Methode zu c):
Die Strukturierung wird mit Folienstiften auf die Puzzle-Grundfläche gezeichnet. Dabei helfen die Markierungen zur Orientierung. Die Lernenden versuchen durch Auslegen der Fläche, den Anteil zu bestimmen.
Das Bild wird hier vergröbert betrachtet (d. h. Leonie sieht 1/3 und nicht 3/9). Ggf. als Hilfe Anteil 3/9 zusätzlich zu 1/3 thematisieren, systematisch wird Erweitern / Kürzen in **B2A** / **B2B** erarbeitet.

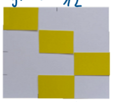
Methode zu d):
Eigene Aufgaben können sowohl mit der Puzzle-Grundfläche als auch ohne diese gelegt werden. Die Puzzle-Grundfläche kann auch mit Folienstiften geeignet strukturiert werden.

2.6 Anteile herausfinden

a) Hilf Tara und Leonie, den Anteil am Rechteck herauszufinden. Wie gehst du vor?

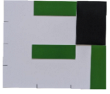
b) Bestimme auch hier die Anteile.

(1) gelb: $\frac{4}{12}$ grau: $\frac{8}{12}$



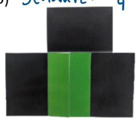
(2) rot: $\frac{4}{9}$ grau: $\frac{5}{9}$

(3)* grau: $\frac{7}{12}$ schwarz: $\frac{1}{6}$ grün: $\frac{3}{12}$



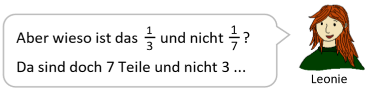
(4) grau: $\frac{3}{8}$ orange: $\frac{3}{8}$ blau: $\frac{2}{8}$

(5) grün: $\frac{1}{4}$ schwarz: $\frac{3}{4}$



(6) rot: $\frac{3}{9}$ blau: $\frac{6}{9}$

c) Leonie wundert sich über das Bild:
Was meint Leonie? Worauf muss man beim Anteile-Ablesen achten?



d) Legt selbst ähnliche Bilder und löst sie gegenseitig.

B1B Prozente bestimmen und darstellen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Prozente begegnen Lernenden als andere Schreibweise für Brüche überall – z. B. in der Werbung, beim Einkaufen oder in den Medien – und begleiten ihren Alltag. Trotz ihres hohen Anwendungsbezugs, ihrer Verankerung im Alltag sowie ihrer konzeptuellen Nähe zu Brüchen werden sie oft als völlig neuer Lernstoff empfunden, den die Lernenden nicht genügend mit bereits aufgebauten Bruchvorstellungen verknüpfen können.

Verknüpfung von Brüchen und Prozenten

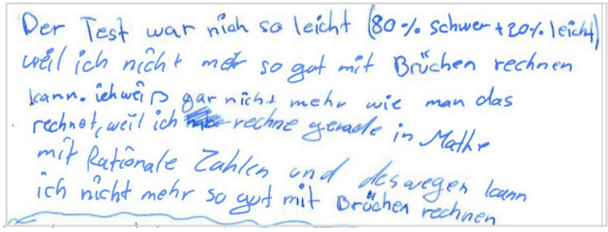
Prozente sollten im Rahmen eines Curriculums zu Brüchen auf natürliche Art und Weise an eine bereits inhaltlich aufgebaute Anteilsvorstellung für Brüche (siehe Baustein **B1A**) anknüpfen und keinesfalls als ein isolierter neuer Lerninhalt verstanden werden (siehe auch Lernendendokument zur ähnlichen Problematik der fehlenden Verknüpfung von Lerninhalten): Sie stellen kein gänzlich neues inhaltliches Konzept, sondern nur eine andere *Schreibweise für spezielle Brüche* dar, nämlich für Brüche mit dem einheitlichen Nenner 100. In dieser kurzen Einheit stehen zunächst nur der Teil und das Ganze im Vordergrund, durch die Anteile als Prozente erklärt werden. Diese Begrifflichkeiten stehen zur Darstellung der Verknüpfung von Brüchen und Prozenten auch weiterhin im Fokus, erst anschließend können die hier genutzten Begriffe Teil, Anteil und Ganzes (siehe Baustein **B1A**) durch die in der Prozentrechnung üblichen Begriffe *Prozentwert*, *Prozentsatz* und *Grundwert* ersetzt werden. An der graphischen Darstellung anhand von Streifen wird die enge Verknüpfung zwischen Brüchen und Prozenten erlebt und Sicherheit im Wechsel zwischen den zwei symbolischen Schreibweisen in beide Richtungen für einfache Zahlenbeispiele (wie 40 % oder 3/10) erlangt.

Dieser Baustein führt Prozente als Hundertstelbrüche ein, erst in Baustein **P** (Prozentrechnung, ehemals Baustein S6) werden dann Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert berechnet.

Prozente als Hundertstel-Bruch

Die als Erstzugriff für die (Wieder-)Erarbeitung fokussierte Vorstellung für Prozente ist daher die *Anteils-Vorstellung*, die auf der ursprünglichen Wortbedeutung des %-Zeichens im Sinne von *pro Hundert* basiert und sich organisch an die Interpretation von Brüchen als Anteile von einem Ganzen anbinden lässt: Es wird von einer aus 100 Einheiten bestehenden Grundmenge als Ganzes ausgegangen, wobei p % den Anteil von p dieser Einheiten an der Grundmenge (100 Einheiten) beschreibt, also p/100 (vgl. Hafner 2012, S. 37). Die Erarbeitung erfolgt im Kontext *Fortschrittsbalken am PC*, der an Alltagserfahrungen der Lernenden anknüpft.

Lernendendokument zeigt: Verknüpfung Prozent-Bruch fehlt



Der Test war nich so leicht (80 % schwer + 20 % leicht)
weil ich nicht mehr so gut mit Brüchen rechnen
kann. ich weiß gar nicht mehr wie man das
rechnet, weil ich ~~habe~~ rechne gerade in Mathe
mit Rationale Zahlen und deswegen kann
ich nicht mehr so gut mit Brüchen rechnen

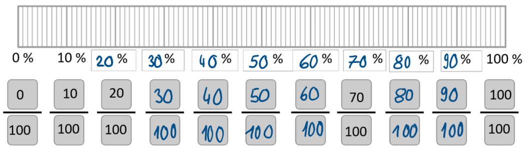
Die für viele Anwendungen wichtige, jedoch schwierigere Vorstellung, bei der Prozente relativ auf beliebige Grundwerte (z. B. 25 €) bezogen werden, wird hier nur für Brüche (Baustein **B1C**) erarbeitet und kann erst im Anschluss auf Prozente erweitert werden (Baustein **P**).

Veranschaulichung und Material

Notations- und Sprechweise

Die Lernenden sollen dazu befähigt werden, flexibel zwischen der Notationsweise für Prozente und Brüche wechseln zu können. Notwendige Voraussetzung dafür ist ein inhaltlich tragfähiges Verständnis von Brüchen als Anteile: Lernende sollten nicht nur formal in beide Richtungen zwischen Brüchen und Prozenten umwandeln können (z. B. „Bei Brüchen mit Nenner 100 lasse ich einfach den Nenner weg und schreibe dafür ein %“), sondern sie sollten diese Entsprechung von Hundertstelbrüchen und Prozenten auch inhaltlich motiviert und materialgestützt erklären können („Das ist dasselbe, weil beide denselben Anteil (d. h. gleich große Teile) im 100stel-Bruchstreifen beschreiben.“).

Aufgabe 1.2: Prozente als Hundertstelbrüche am Streifen



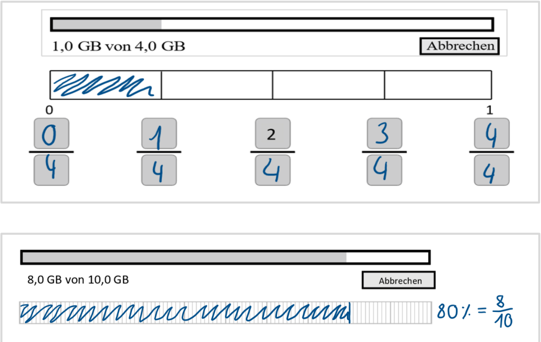
0 %	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %	100 %
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Die wichtige Erkenntnis, dass einer Prozentzahl verschiedene gleichwertige Brüche zugeordnet werden können, aber ein Bruch immer eine Darstellung als Prozentzahl hat, wird in dieser Einheit nur intuitiv durch Zehntel- und Hundertstel-Brüche angebahnt (siehe 1.6 und 1.7) und erst in Baustein **B2C** nach vielfältigen Erfahrungen zur Gleichwertigkeit von Brüchen systematisch vertieft.

Fortschrittsbalken und Bruchstreifen

Die inhaltliche Verknüpfung von Brüchen und Prozenten wird durch das Darstellungsmittel des Streifens gestützt:

Aufgaben 1.1/1.4: Ladebalkenfortschritt auf Streifen übertragen

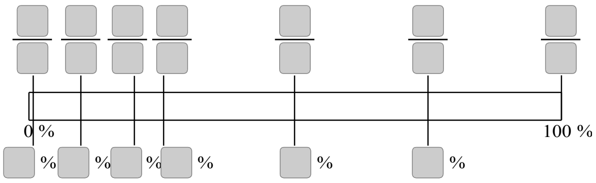


Das zentrale Anschauungsmittel der Bruchstreifen kommt schon in Baustein **B1A** und allen weiteren Bausteinen vor. Prozente als Hundertstelbrüche werden sowohl aus Streifen abgelesen als auch mit ihnen dargestellt.

Als Einstieg werden alltagsbasierte bildliche Darstellungen in Form von Fortschrittsbalken am Computer gewählt, die vielen Jugendlichen aus der Alltagswelt vertraut sind. Diese intuitive Vorerfahrung wird aufgegriffen und für Schätzungen zu Anteilen sowie Prozenten genutzt. So gibt der fortlaufende Streifen an, wie weit der Computer mit seiner Aufgabe, die durch den gesamten Balken symbolisiert wird, vorangeschritten ist. Der gesamte Streifen stellt dabei das Ganze (etwa die Gesamtarbeitszeit oder -datenmenge) dar. Zuweilen werden weitere Informationen zum Status ergänzt, z. B. zur bereits kopierten Datenmenge. Ein Prozess, dessen Ladebalken schon weiter ist, hat den größeren Anteil seines Auftrags geschafft.

Diese alltagsbasierten Darstellungen werden in die abstraktere Darstellung von Anteilen in Bruchstreifen überführt. Dabei werden im ersten Zugriff im Übergang übersichtliche und leicht zugängliche Streifen wie der 4tel-Streifen gewählt, die schließlich von komplexeren 10tel- bzw. 100tel-Streifen abgelöst werden, in denen Anteile als Prozente interpretiert werden. Der 100tel-Streifen vereint die 10tel- und die 100tel-Struktur durch hervorgehobene 10tel-Anteile, sodass eine enge Verbindung der 10tel- und 100tel-Brüche mit Prozenten möglich wird.

Ausblick auf Baustein B2C: Streifen mit Doppelskala



In der Förderung

Aufbau der Förderung

Der dreiseitige Förderbaustein besteht aus einer einzigen **Fördereinheit (Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen)**: Nach einem qualitativen und lebensweltlich angebundenen Einstieg über Fortschrittsbalken beim Computer, wird zunächst zu einfachen Bruchstreifen übergegangen: Es werden operativ Anteile zunächst im 4tel-Streifen betrachtet, um die Beziehung zwischen der Länge des Fortschrittsbalkens und dem markierten Teil im Bruchstreifen zu erarbeiten. Im nächsten Schritt werden - immer noch angebunden an die lebensweltlichen Fortschrittsbalken - Anteile im 10tel-Streifen identifiziert, bevor dann zum komplexen 100tel-Streifen übergegangen wird.

Aktivität zu Aufgabe 1.2: Anteile im Hunderterstreifen übertragen

Der umgekehrte Darstellungswechsel von symbolischer Darstellung zum Bruchstreifen, erste intuitive Erfahrungen zur Gleichwertigkeit von 10tel- und 100tel-Brüchen und damit Prozenten sowie die intuitive Überprüfung und Bearbeitung von Fehlvorstellungen (z. B. 4/10 = 4 %) an Bruchstreifen, runden diese Fördereinheit ab.

Digitale Medien zum Baustein

Digitale Bruchstreifen:
https://vam.dzlm.de/vams/apps/Bruchstreifen.html

Weiterführende Literatur

Baireuther, P. (1983). Die Grundvorstellungen der Prozentrechnung. In: Mathematische Unterrichtspraxis 4(2), 25 - 34.

Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen. Berlin: Vieweg + Teubner, 37 - 42.

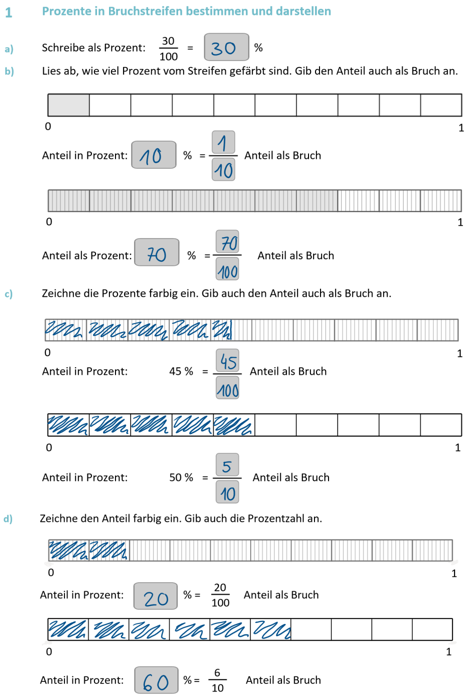
B1B Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 15 - 20 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Lernende kann irritieren, dass sie zu einem Streifen zwei Zahlwerte angeben sollen. Hier darauf hinweisen, dass sie denselben Anteil nur unterschiedlich aufschreiben sollen.

45 % ist verhältnismäßig schwerer im 100tel-Streifen einzuzeichnen – Lernende können sich hier schnell verzählen.



1 Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen

a) Schreibe als Prozent: $\frac{30}{100}$ = 30 %

b) Lies ab, wie viel Prozent vom Streifen gefärbt sind. Gib den Anteil auch als Bruch an.

Anteil in Prozent: 10 % = $\frac{1}{10}$ Anteil als Bruch

Anteil als Prozent: 70 % = $\frac{70}{100}$ Anteil als Bruch

c) Zeichne die Prozente farbig ein. Gib auch den Anteil auch als Bruch an.

Anteil in Prozent: 45 % = $\frac{45}{100}$ Anteil als Bruch

Anteil in Prozent: 50 % = $\frac{5}{10}$ Anteil als Bruch

d) Zeichne den Anteil farbig ein. Gib auch die Prozentzahl an.

Anteil in Prozent: 20 % = $\frac{20}{100}$ Anteil als Bruch

Anteil in Prozent: 60 % = $\frac{6}{10}$ Anteil als Bruch

Hinweise zur Auswertung

Diagnoseaufgabe 1: Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a)	$\frac{30}{100}$ = 3 %	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel.	Prozente als Anteile in der *Hundertstel-Vorstellung* erarbeiten (1.1 - 1.4). Zusammenhang von Zehntel- und Hundertstelbrüchen in Streifen herstellen (1.7). Bei größeren Problemen mit den Stellenwerten auf Förderung **D1A** zurückgreifen.
b.1), b.2)	1 % bzw. 7 % und / oder Anteil: $\frac{1}{100}$ bzw. $\frac{7}{100}$	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel. Probleme beim Darstellungswechsel (Bild → Symbol).	
	90 % bzw. 30 % und/oder Anteil: $\frac{9}{10}, \frac{90}{100}$ bzw. $\frac{3}{10}, \frac{30}{100}$	Angabe des nicht gefärbten Anteils.	Kein Förderbedarf. Aufgabenstellung wurde uminterpretiert zur Betrachtung des Rests.
c.1), c.2)	Es wurden bei (1) 4 Teile gefärbt	Ungenaues Zeichnen oder Probleme beim Verknüpfen nicht „glatter Zähler“ mit dem 100tel-Bruchstreifen (randständigeres Phänomen).	100tel-Bruchstreifen erarbeiten und Darstellungswechsel üben (1.3 - 1.5). 1.6 zum intuitiven Verknüpfen von Prozenten und Zehntelbrüchen.
	Keine Markierung auf dem Bruchstreifen (2)	Schwierigkeiten beim Verknüpfen von Prozenten und dem 10tel-Bruchstreifen.	Zehntel- und Hundertstelbrüche intuitiv verknüpfen (1.6).
	$\frac{45}{10}$ bzw. $\frac{50}{10}$	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel. Probleme beim Darstellungswechsel (Symbol → Symbol).	Prozente als Anteile in der *Hundertstel-Vorstellung* erarbeiten (1.1 - 1.4). Zusammenhang von Zehntel- und Hundertstelbrüchen in Streifen herstellen (1.7). Darstellungswechsel üben (1.5).
d.1), d.2)	2 % bzw. 6 %	Verwechslung der Stellenwerte 10tel und 100tel. Schwierigkeiten beim Wechsel der Darstellungsart (Symbol → Symbol).	

B1B Wie können wir fördern, Prozente zu bestimmen und darzustellen

1 Prozente in Bruchstreifen bestimmen und darstellen

1.1 Erarbeiten

Ziel: Bruchstreifen als verallgemeinerte Fortschrittsbalken kennenlernen, Anteile in Bruchstreifen übertragen und ablesen; vom Fortschrittsbalken zum 10tel-Bruchstreifen abstrahieren

Material: KV: Ggf. größere Kopie der Streifen in c)

Umsetzung: a) UG, b), c), d), e) jeweils EA, dann UG

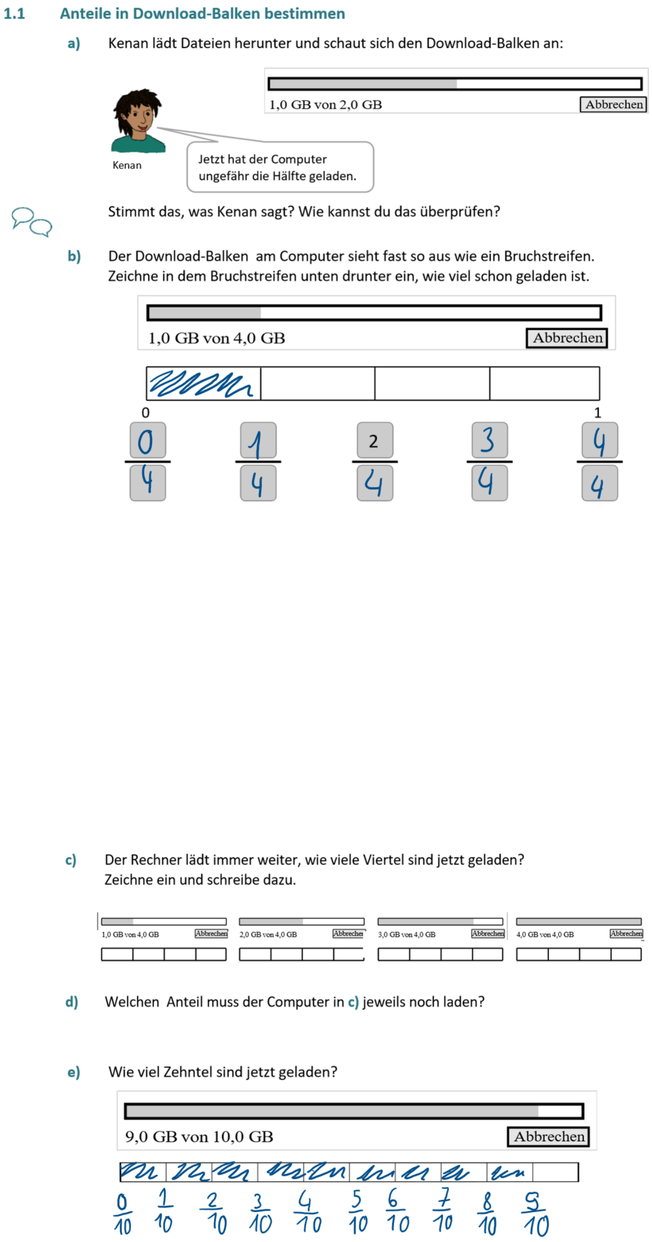
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile in Bruchstreifen übertragen und ablesen. Dabei lernen sie Bruchstreifen als verallgemeinerte Fortschrittsbalken kennen und abstrahieren vom Fortschrittsbalken zum 10tel-Bruchstreifen. Mit den Bruchstreifen kann an Aufgabe 2.1 in **B1A** angeknüpft werden. Falls die Lernenden den Bruchstreifen noch nicht kennen, sollten Sie hier die Bruchstreifen mit dem Fortschrittsbalken und den 4tel-Bruchstreifen mit dem 10tel-Bruchstreifen vergleichen lassen. Wichtig ist in diesem Kontext, dass die Streifen gleich lang sind.
Im Unterrichtsgespräch in b) ist die explizite Thematisierung der Rolle des Zählers und der Viertel wichtig. Eine typische Schwierigkeit ist die Angabe der Brüche 0/4 und 4/4.

Impulse zu b):

- Warum passt der Anteil zum Bild?
- Wo siehst du den Teil (den Zähler) und wo siehst du das Ganze (den Nenner)?
- Wo siehst du die Hälfte im Downloadbalken?
- Wie kann so ein Bruchstreifen helfen, um den Anteil herauszufinden?
- 1/4, 2/4, 3/4. Was kommt danach? Was kommt davor?

Eine typische Schwierigkeit in c) ist die Interpretation der Anteilsmarkierung: Die Anteile können sowohl als Flächen (wie in **B1A**) bzw. Strecken als auch als Positionsmarkierungen (auf dem Zahlenstrahl) interpretiert werden. Dabei ist die erste Interpretation diejenige, die an die Anteilsvorstellung anknüpft und hier fokussiert werden sollte, die zweite aber ein späteres Lernziel in **DB** (Dezimalbrüche).

Hintergrund zu e):
Hier erfolgt die weitere Ablösung vom Fortschrittsbalken (Kontext) zum 10tel-Bruchstreifen (mathematisches Darstellungsmittel).
0/10 und 10/10 bereiten dabei unter Umständen Schwierigkeiten (siehe 1.1). Hier ist es wichtig, dass auch auf die Frage nach dem Rest eingegangen wird.



1.1 Anteile in Download-Balken bestimmen

a) Kenan lädt Dateien herunter und schaut sich den Download-Balken an:

Stimmt das, was Kenan sagt? Wie kannst du das überprüfen?

b) Der Download-Balken am Computer sieht fast so aus wie ein Bruchstreifen.
Zeichne in dem Bruchstreifen unten drunter ein, wie viel schon geladen ist.

c) Der Rechner lädt immer weiter, wie viele Viertel sind jetzt geladen?
Zeichne ein und schreibe dazu.

d) Welchen Anteil muss der Computer in **c)** jeweils noch laden?

e) Wie viel Zehntel sind jetzt geladen?

1.2 Erarbeiten

Ziel: Zusammenhang von Prozent und Hundertstelbrüchen

Material: Ggf. größere Streifen aus dem MSK-Materialkoffer

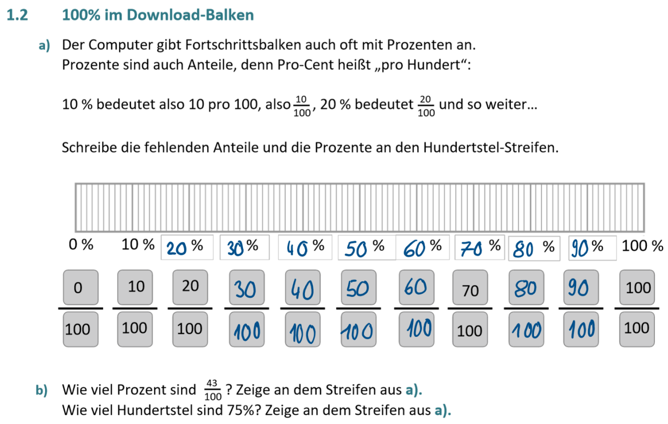
Umsetzung: a) EA, dann UG, b) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen den Zusammenhang von Prozent und Hundertstelbrüchen verstehen und Anteile und Prozente aufeinander beziehen können.

Impulse:

- Wo siehst du den Zähler/den Nenner in dem Streifen?
- Warum passen 30 % und 30/100 zusammen? (30 pro 100, also der Teil besteht aus 30 gleich großen Stücken und das Ganze besteht aus 100 gleich großen Stücken. Somit passt 30 % zum Bruch 30/100 denn der Zähler gibt den Teil an und der Nenner das Ganze; 30 % = 30/100.)

Methode:
Bedeutung von weiteren vorgegebenen Anteilen wie 70/100 und Prozenten wie 60 % klären lassen, um Basis für die Bearbeitung der fehlenden Anteile und Prozente zu schaffen.



1.2 100% im Download-Balken

a) Der Computer gibt Fortschrittsbalken auch oft mit Prozenten an.
Prozente sind auch Anteile, denn Pro-Cent heißt „pro Hundert“:

10 % bedeutet also 10 pro 100, also $\frac{10}{100}$, 20 % bedeutet $\frac{20}{100}$ und so weiter…

Schreibe die fehlenden Anteile und die Prozente an den Hundertstel-Streifen.

0 %	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %	100 %
$\frac{0}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{50}{100}$	$\frac{60}{100}$	$\frac{70}{100}$	$\frac{80}{100}$	$\frac{90}{100}$	$\frac{100}{100}$

b) Wie viel Prozent sind $\frac{43}{100}$? Zeige an dem Streifen aus a).
Wie viel Hundertstel sind 75%? Zeige an dem Streifen aus a).

1.3 Üben

Ziel: Prozent, Hundertstel und Zehntel in Zusammenhang setzen

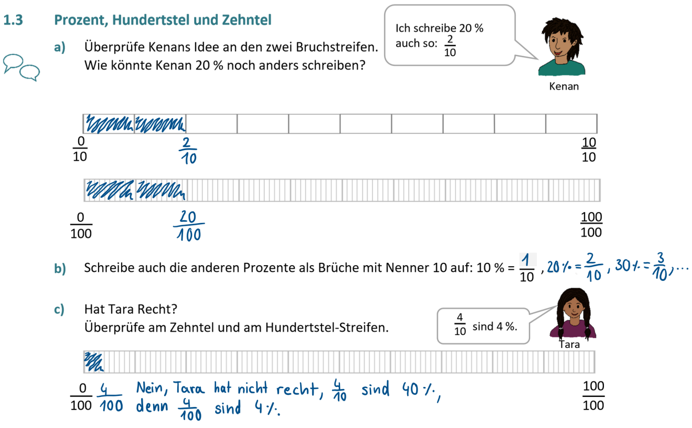
Material: KV: Mehrere 10tel- und 100tel-Bruchstreifen zum Übertragen der Anteile (ggf. laminiert)

Umsetzung: a), b), c) jeweils EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Prozent, Hundertstel und Zehntel in Zusammenhang setzen. Dabei wird mit Tara eine typische Fehlvorstellung aufgegriffen.

Impulse:

- Wo siehst du die 10 im Bruchstreifen, wo die 100?
- Warum sind 2/10 und 20/100 gleichwertig? (Der 100tel Streifen ist feiner einteilt als der 10tel Streifen. 1/10 ist genauso groß wie 10/100.)
- Wie kann man Hundertstel auch als Zehntel aufschreiben? Warum darf man das? Zeige am Bruchstreifen.



1.3 Prozent, Hundertstel und Zehntel

a) Überprüfe Kenans Idee an den zwei Bruchstreifen.
Wie könnte Kenan 20 % noch anders schreiben?

Kenan: Ich schreibe 20 % auch so: $\frac{2}{10}$

$\frac{0}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{10}{10}$

$\frac{0}{100}$ $\frac{20}{100}$ $\frac{100}{100}$

b) Schreibe auch die anderen Prozente als Brüche mit Nenner 10 auf: 10 % = $\frac{1}{10}$, 20 % = $\frac{2}{10}$, 30 % = $\frac{3}{10}$, …

c) Hat Tara Recht?
Überprüfe am Zehntel und am Hundertstel-Streifen.

Tara: $\frac{4}{10}$ sind 4 %.

$\frac{0}{100}$ $\frac{4}{100}$ Nein, Tara hat nicht recht, $\frac{4}{10}$ sind 40 %, denn $\frac{4}{100}$ sind 4 %. $\frac{100}{100}$

1.4 Üben

Ziel: Anteile als Hundertstel, Zehntel und Prozent angeben

Material: Digitale Bruchstreifen; KV: Mehrere 10tel- und 100tel-Bruchstreifen zum Übertragen der Anteile (ggf. laminiert)

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile in Hundertstel und Prozent angeben und durch darstellungsvernetzende Impulse der Lehrkraft ihr Verständnis von dem Zusammenhang dieser vertiefen. Dabei sollen sie die Hundertstelbruch-Schreibweise, (Zehntelbruch)-Schreibweise und Prozentschreibweise nutzen.
Die GB-Angabe kann die Bestimmung des Anteils unterstützen und direkt in die Zehntelbruch-Schreibweise überführt werden. Eine Umwandlung in Hundertstelbrüche durch Erweitern ist in dieser Kompetenz noch nicht Lernziel, sondern erst in **B2 C.** Hier werden Anteile nur qualitativ bestimmt.

Impulse:

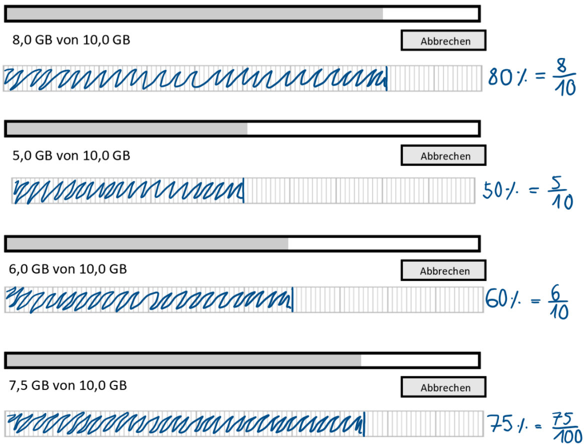
- Wo siehst du den Teil (Zähler), das Ganze (Nenner) im Bruchstreifen? Wo siehst du die Prozentzahl im Bruchstreifen?
- Warum passt 80/100 zu 80 %? (80 pro 100 heißt, dass ich das Ganze in 100 gleich große Stücke teilen kann und davon 80 Stücke markiere.)
- Wie passt 75 % zu 7,5 GB? Warum sind es nicht 7,5 %?
- Was wäre der passende als 10tel Bruch?

Methode:
Das Übertragen und Ablesen der Anteile kann – vor allem im 100tel-Bruchstreifen – mit Ungenauigkeiten behaftet sein, da das genaue Ablesen visuell z.T. schwer fällt. Hier kommt es vor allem auf eine qualitativ tragfähige Lösung der Aufgabe an. Falls im 100tel-Bruchstreifen nicht die den GB-Angaben entsprechenden exakten Anteile abgelesen werden (was bei der feinen Einteilung des Streifens nicht einfach ist), sollte dies nicht problematisiert werden.

1.4 Anteile mit Streifen bestimmen

a) Welchen Anteil hat der Computer von der Datei kopiert?
Gib den Anteil in Hundertstel und in Prozent an.
Du kannst ihn dazu auch auf die digitalen Streifen übertragen oder den Hundertstelstreifen aus Papier nutzen.

Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html



b) Stellt euch im digitalen Hundertstelstreifen gegenseitig Aufgaben:

- Eine Person sagt eine Prozentzahl,
- die andere trägt sie im Hundertstelstreifen ein und übersetzt sie in einen Bruch.

1.5 **Üben**

Ziel: Darstellungswechsel vom symbolisch dargestellten Anteil zum Bild vornehmen

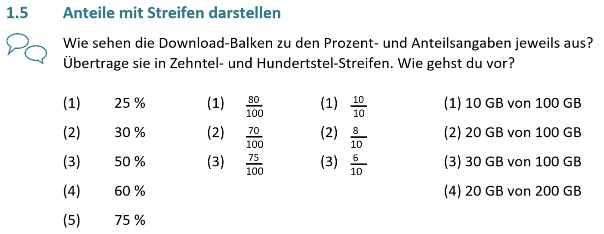
Material: KV: Mehrere 10tel- und 100tel-Bruchstreifen zum Übertragen der Anteile (ggf. laminiert)

Umsetzung: EA oder PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile im Bruchstreifen darstellen. Es findet ein direkter Übergang zum Bruchstreifen (Darstellungswechsel vom Symbol zum Bild) statt.
Eine typische Schwierigkeit stellen die verschiedenen Schreibweisen (Prozent, Hundertstel- und Zehntelbrüche) dar – insbesondere bei der 4. Spalte.
Viele Anteile lassen sich direkt in den 100tel- bzw. 10tel-Bruchstreifen übertragen. Bei (4) in der letzten Spalte kann man darauf hinweisen, dass die Bezugsgröße von 100 GB auf 200 GB wechselt.

Impulse:

- Warum passt der 100tel-Streifen gut zu den GB?
- Welchen Streifen wählst du? Warum?
- Warum passt die Prozentzahl/ der Bruch zum Bruchstreifen?
- Wo siehst du die Anzahl der gleich großen Stücke des Ganzen und die Anzahl der Stücke, die den Teil ausmachen in der Prozentzahl/im Bruch?



1.5 **Anteile mit Streifen darstellen**

Wie sehen die Download-Balken zu den Prozent- und Anteilsangaben jeweils aus? Übertrage sie in Zehntel- und Hundertstel-Streifen. Wie gehst du vor?

(1)	25 %	(1)	$\frac{80}{100}$	(1)	$\frac{10}{10}$	(1) 10 GB von 100 GB
(2)	30 %	(2)	$\frac{70}{100}$	(2)	$\frac{8}{10}$	(2) 20 GB von 100 GB
(3)	50 %	(3)	$\frac{75}{100}$	(3)	$\frac{6}{10}$	(3) 30 GB von 100 GB
(4)	60 %					(4) 20 GB von 200 GB
(5)	75 %					

B1C Anteile nehmen von Mengen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Im Gegensatz zum Anteil eines Ganzen (Baustein **B1A)** ist das Ganze beim Bestimmen von Mengen keine zusammenhängende Einheit (z. B. ein Bruchstreifen), sondern besteht aus mehreren Objekten (z. B. Bonbons oder Plättchen). Es ist bemerkenswert, wie viel schwerer dies den Lernenden fällt zu bestimmen.

Vorstellungen vom Ganzen ausweiten

Die Anforderung an Lernende besteht darin, von der Vorstellung des Ganzen als einer *festen* und *zusammenhängenden* Einheit, auf eine zusammengehörende Menge, die aus unabhängigen Objekten besteht, auszuweiten. Dabei ist die Kenntnis des Anteils eines Ganzen und der zugehörigen Begrifflichkeiten (Baustein **B1A)** eine notwendige Voraussetzung.

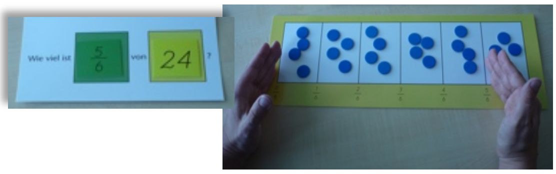
Der Anteil beschreibt weiterhin die Beziehung vom Teil zum Ganzen. Das Ganze ist dieses Mal eine Menge (8 Plättchen). Der Zähler beschreibt wie viele Felder ich betrachte und bestimmt somit den Teil (Auf 3 Feldern liegen **6 Plättchen**). Der Anteil beschreibt weiterhin die Beziehung zwischen Teil und Ganzem: Das sind **6 von 8** Plättchen auf **3 von 4** Feldern. Erst durch die Angabe des Ganzen als Menge von 8 Plättchen wird eine konkrete Menge berechenbar.

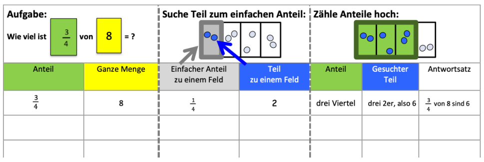
Einigen Lernenden kann der notwendige Schritt des (Um-)Bildens von Gruppen und Einheiten Schwierigkeiten bereiten, wenn sie Anteile wie 5/6 nur als „5 von genau 6 Objekten“ interpretieren und keinen Bezug auf ein anderes Ganzes als den Nenner herstellen können, wie etwa bei „5/6 von 24“.

Anteil-Nehmen mit multiplikativen Strukturen

Bei Mengen-Situationen wird die Multiplikation als *Anteil-Nehmen* zentral. Am Beispiel „5/6 von 24 Plättchen“ lässt sich das so beschreiben:

Material für Aufgabe 1.1: 5/6 von 24 bestimmen – mit Protokoll

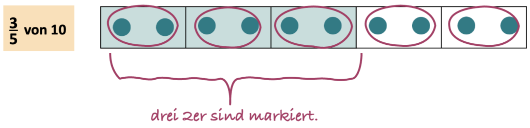




Aufgabe: Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von 8 = ?		Suche Teil zum einfachen Anteil:		Zähle Anteile hoch:		
Anteil	Ganze Menge	Einfacher Anteil zu einem Feld	Teil zu einem Feld	Anteil	Gesuchter Teil	Antwortsatz
$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{4}$	2	drei Viertel	drei 2er, also 6	$\frac{3}{4}$ von 8 sind 6

Der Anteil 5/6 muss auch hier in einem ersten Schritt als Teil eines Ganzen verstanden werden, um den richtigen Streifen zu wählen und die richtige Anzahl der Felder zu erkennen, die betrachtet werden sollen. Das folgende Beispiel zeigt, dass dabei Strukturen berücksichtigt werden müssen, die Anteilsstruktur, die Divisionsstruktur und die Multiplikationsstruktur.

Lernziel: Rechnungen begründen durch Strukturen explizieren



	Materialhandlung / Schritte	Strukturen, die explizit verbalisiert werden sollten
$\frac{3}{5}$	3 von 5 Feldern im Fünftel-Streifen markiert. Wir müssen also erst Fünftel bilden.	**Anteils-Struktur** am Bruchstreifen: Der Bruch beschreibt den Anteil, also das Verhältnis vom Teil zum Ganzen
10 : 5	10 Plättchen werden auf 5 Felder verteilt, um Fünftel zu bilden. 2 Plättchen auf jedem Feld. Jedes Fünftel hat also eine 2er-Gruppe.	**Divisions-Struktur:** Ich bilde gleich große Gruppen: 10 verteilt in 5 Gruppen, das passt zur Division 10 : 5 = 2
3 · 2	Wir wollen aber drei Fünftel. Also nehmen wir ein, zwei, drei 2er, also 3 · 2.	**Multiplikations-Struktur:** Ich zähle gleich große Gruppen: drei 2er, das passt zur Multiplikation 3 · 2 = 6

Veranschaulichung und Material

Bruchstreifen

Zentrales haptisches Anschauungsmittel sind große Bruchstreifen (3tel- bis 9tel-Streifen), auf denen Plättchenmengen verteilt werden: Die Bruchstreifen knüpfen als zusammenhängende Ganze an die Streifendarstellungen aus den Bausteinen **B1A** bzw. **B1B** an.

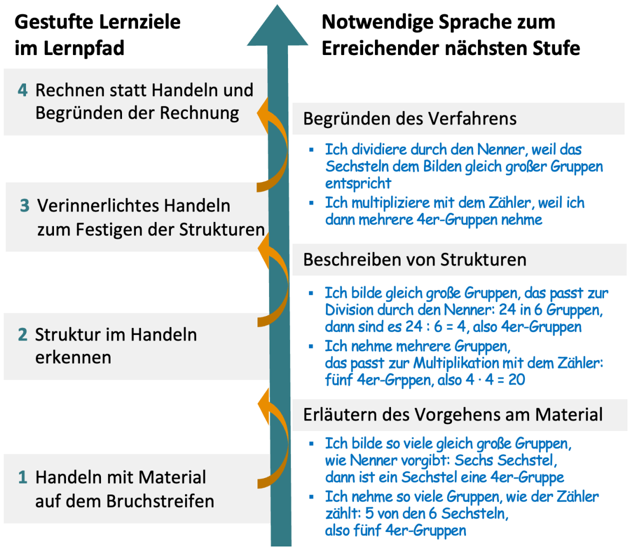
Die vorgegebene Strukturierung der Streifen unterstützt das Anteil-Nehmen anschaulich. Sie erleichtert das Bilden und Umbilden von Einheiten und schafft eine Verbindung zwischen dem bekannten Anteil von einem Ganzen und dem neu zu erarbeitenden Anteil von Mengen. Nach dem Verteilen der Plättchen auf dem Streifen kann man alle relevanten Strukturen gleichzeitig sehen.

In der Förderung

Lernpfad hin zum begründeten Rechnen

Ein Operationsverständnis aufzubauen, bedeutet, dass die Lernenden verstehen, warum sie welche Schritte vollziehen, um Anteile von Mengen darzustellen und zu bestimmen. Solch ein Verständnis wird nicht aufgebaut, indem man den Lernenden einfache Rezepte an die Hand gibt, sondern, indem man ein langfristiges Verständnis anstrebt. Das Material von Mathe-Sicher-Können ist anhand dieses Lernpfades aufgebaut, wobei auch die einzelnen Aufgaben Bearbeitungen auf verschiedene Lernstufen zulassen. Wichtig ist, dass die Lernenden ihr Vorgehen am Material erläutern und die Strukturen explizit beschreiben. Es geht dann darum, diese Strukturen auch mit der Operation zu vernetzen, um im letzten Schritt das Verfahren begründen zu können. Die Lernenden sollen die Bedeutung der Rechnung erklären können, indem sie auf das mentale Handeln zurückgreifen.

Lernpfad hin zum begründeten Rechne des Anteil-Nehmens



Gestufte Lernziele im Lernpfad

Notwendige Sprache zum Erreichender nächsten Stufe

4 Rechnen statt Handeln und Begründen der Rechnung

Begründen des Verfahrens

- Ich dividiere durch den Nenner, weil das Sechsteln dem Bilden gleich großer Gruppen entspricht
- Ich multipliziere mit dem Zähler, weil ich dann mehrere 4er-Gruppen nehme

3 Verinnerlichtes Handeln zum Festigen der Strukturen

Beschreiben von Strukturen

- Ich bilde gleich große Gruppen, das passt zur Division durch den Nenner: 24 in 6 Gruppen, dann sind es 24 : 6 = 4, also 4er-Gruppen
- Ich nehme mehrere Gruppen, das passt zur Multiplikation mit dem Zähler: fünf 4er-Grppen, also 4 · 4 = 20

2 Struktur im Handeln erkennen

Erläutern des Vorgehens am Material

- Ich bilde so viele gleich große Gruppen, wie Nenner vorgibt: Sechs Sechstel, dann ist ein Sechstel eine 4er-Gruppe
- Ich nehme so viele Gruppen, wie der Zähler zählt: 5 von den 6 Sechsteln, also fünf 4er-Gruppen

1 Handeln mit Material auf dem Bruchstreifen

Der Lernpfad gibt die gestuften Lernziele vor, in denen das Verständnis erarbeitet werden kann. Diese gestuften Lernziele im Blick zu haben, hilft auch dabei, zu entscheiden, welches Kind im Unterricht gerade welchen Impuls braucht.

Bedeutungsbezogene Denksprache

Für B1C sind Satzbausteine relevant, die sowohl die Beziehung vom Teil zum Ganzen ausdrücken („2/5 **von** 30"/ „30 Plättchen sind **das Ganze**. **Davon** brauche ich 2/5"), als auch das Denken in Gruppen („Das Ganze sollen wir in 5 **gleich große Gruppen** teilen. Das sind fünf **6er**-Gruppen.") fokussieren.

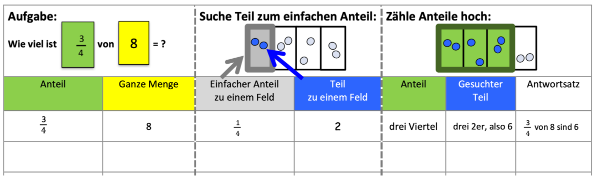
Folgende wiederkehrende Impulse dienen dazu, die Strukturen hineinzusehen und zu versprachlichen und dadurch die Darstellungsvernetzung anzuregen: Welcher Bruchstreifen passt zu ...? Warum? Wo siehst du den Teil und das Ganze im Bild? Wie groß sind deine Gruppen? Warum? Wie viele gleich große Gruppen hast du? Warum?

Aufbau der Förderung

In **Fördereinheit 1 (Anteile von Mengen bestimmen)** wird mit der materialgestützten Erarbeitung des Anteils von Mengen begonnen. Damit wird auf einer sehr konkreten Stufe der Vorstellungsbildung angesetzt: Es werden Objekte verteilt und nicht abstraktere Größen genutzt wie etwa „2/3 von 300 €".

Gerade schwächere Lernende benötigen diese konkrete Handlung am Material, um die einzelnen Operationen als Zwischenschritte zur Bestimmung des Anteils inhaltlich zu verstehen. Um die Strukturen zu erkennen, müssen sie jedoch auch versprachlicht werden (siehe rechte Seite im Lernpfad). Das Hinensehen von Strukturen und ihre Versprachlichung werden durch die Bereitstellung von sprachlichen Mitteln in Form eines Protokolls gestützt.

Aufgabe 1.1: Bereitstellung sprachlicher Mittel im Protokoll



Aufgabe: Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von 8 = ?

Suche Teil zum einfachen Anteil:

Zähle Anteile hoch:

Anteil	Ganze Menge	Einfacher Anteil zu einem Feld	Teil zu einem Feld	Anteil	Gesuchter Teil	Antwortsatz
$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{4}$	2	drei Viertel	drei 2er, also 6	$\frac{3}{4}$ von 8 sind 6

Darüber hinaus werden an das konkrete Material gebundene Vorstellungsübungen zur Reflexion und Verinnerlichung der Handlung angebahnt (Verteilen der Plättchen im Kopf vorstellen).

In **Fördereinheit 2 (Anteile von Mengen berechnen)** wird der Schritt von materialgestützten Anteilsbildungen hin zur symbolischen Darstellung und zum Kalkül vollzogen. Dabei wird an die Erfahrungen aus der vorangehenden Fördereinheit angeknüpft. Das konkrete Verteilen der Objekte wird mit dem Kalkül verknüpft (s.o.).

Digitale Medien zum Baustein

Alle digitalen Medien werden kontinuierlich ausgebaut und sind stets aktuell verlinkt unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#b1

- In den **didaktischen Themenfilmen** werden die aufgeführten Aspekte zum Anteilsverständnis mit Fallbeispielen illustriert und es wird aufgezeigt, worauf es bei der Förderung ankommt (nach Registrierung zugänglich):
  B1-B3: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/themenvideo/brueche1
  B1C: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/themenvideo/brueche2
- Mit den **Erklärvideos** lassen sich die erarbeiteten Inhalte mit den Kindern systematisieren.
  1) Anteile von Mengen bestimmen: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=692
  2) Anteile von Mengen berechnen: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=693
- Die digitale Diagnose wird in zunehmend mehr Bundesländern im **MSK-Online-Check** möglich.

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Springer Spektrum.

Prediger, S., Krägeloh, N. & Wessel, L. (2013). Wieso 3/4 von 12, und wo ist der Kreis? Brüche für Teile von Mengen handlungs- und strukturorientiert erarbeiten. Praxis der Mathematik in der Schule 55(52), 9–14.

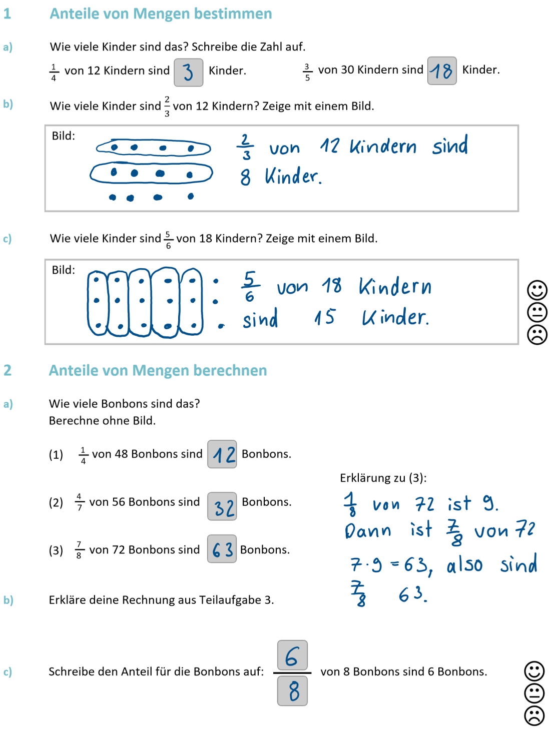
B1C Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 20 - 30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Manche Lernende zeichnen figurative Bilder mit realistischen Details, die für den mathematischen Kern nicht notwendig sind, oder können sich unter dem Arbeitsauftrag nichts vorstellen. Diese Lernenden darauf hinweisen, dass mit *Bild* (1 b) und c)) auch Punktebilder oder Ähnliches gemeint ist und dass es wesentlich ist, dass das Bild die Aufgabe (und nach Möglichkeit die Lösungsidee) gut zeigt.

2c) bereitet Lernenden z.T. Schwierigkeiten. Dann auf die analoge Formulierung in 2a) hinweisen bzw. konkret in der vertrauteren Formulierung nachfragen: Welcher Anteil ist denn 6 von 8 Bonbons?



1 Anteile von Mengen bestimmen

a) Wie viele Kinder sind das? Schreibe die Zahl auf.

$\frac{1}{4}$ von 12 Kindern sind 3 Kinder. $\frac{3}{5}$ von 30 Kindern sind 18 Kinder.

b) Wie viele Kinder sind $\frac{2}{3}$ von 12 Kindern? Zeige mit einem Bild.

Bild: $\frac{2}{3}$ von 12 Kindern sind 8 Kinder.

c) Wie viele Kinder sind $\frac{5}{6}$ von 18 Kindern? Zeige mit einem Bild.

Bild: $\frac{5}{6}$ von 18 Kindern sind 15 Kinder.

☺ 😐 ☹

2 Anteile von Mengen berechnen

a) Wie viele Bonbons sind das?
Berechne ohne Bild.

(1) $\frac{1}{4}$ von 48 Bonbons sind 12 Bonbons.

(2) $\frac{4}{7}$ von 56 Bonbons sind 32 Bonbons.

(3) $\frac{7}{8}$ von 72 Bonbons sind 63 Bonbons.

b) Erkläre deine Rechnung aus Teilaufgabe 3.

Erklärung zu (3):
$\frac{1}{8}$ von 72 ist 9.
Dann ist $\frac{7}{8}$ von 72
$7 \cdot 9 = 63$, also sind
$\frac{7}{8}$ 63.

c) Schreibe den Anteil für die Bonbons auf: $\frac{6}{8}$ von 8 Bonbons sind 6 Bonbons.

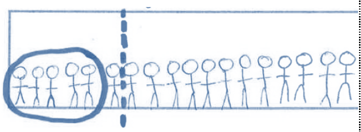
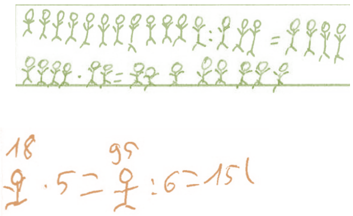
☺ 😐 ☹

Hinweise zur Auswertung

Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1.a), 2.a), 2.b)	z. B. $\frac{1}{4}$ von 12 ist 4	I: Der Nenner wird als Teil interpretiert. oder II: Zähler und Nenner werden miteinander multipliziert: 1 · 4 = 4.	Grundlage: Das Bilden von Einheiten am Material erarbeiten (1.1). Die Rolle von Zähler und Nenner für das Bilden von Anteilen erarbeiten (1.2). Den Kalkül mit der Vorstellung verbinden (1.3 - 1.4). Aufbau: Wenn Fördereinheit 1 inhaltlich bewältigt ist, wird in Fördereinheit 2 der Kalkül auch für größere Zahlen erarbeitet, bei denen man nicht mehr gerne Bilder zeichnet. Darüber hinaus Vorstellungen flexibilisieren durch verschiedene Aufgabentypen und Darstellungswechsel (2.1 - 2.3).
	z. B. $\frac{3}{5}$ von 30 ist 6	Es wird der Teil zum Stammbruch angegeben, d. h. 1/5 von 30 berechnet. Die Schwierigkeit besteht darin, den Zähler in die Bestimmung des Teils einzubeziehen.	
	z. B. $\frac{3}{5}$ von 30 ist 15	I: Zähler und Nenner werden miteinander multipliziert: 3 · 5 = 15. oder II: Wie I, aber das Ergebnis, hier 15, wird noch von 30 abgezogen: 30 - 3 · 5 = 15. Der Anteil kann in beiden Fällen nicht multiplikativ auf das Ganze, hier 30, bezogen werden.	

Diagnoseaufgabe 1: Anteile von Mengen bestimmen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a.2)	10	Es wird vermutlich durch den Zähler geteilt: 30 : 3 = 10.	Das Bilden von Einheiten am Material erarbeiten (1.1). Die Rolle von Zähler und Nenner für das Bilden von Anteilen erarbeiten (1.2). Den Kalkül mit der Vorstellung verbinden (1.3 - 1.4).
b), c)		Es werden 2 von 3 bzw. 5 von 6 Kindern angemalt (die 3 bzw. 6 Kinder werden von den restlichen abgetrennt). Es besteht die Schwierigkeit, den Anteil auf eine größere Menge als die Zahl im Zähler zu beziehen.	
		Es wird nur der Nenner, 3 bzw. 6, markiert.	
		Die Aufgabe wird richtig berechnet. Die Zahlen werden durch bildliche Darstellungen der Kinder ersetzt, d. h. strukturelle Zusammenhänge können nicht bildlich dargestellt werden.	Zusammenhänge zwischen Zähler, Nenner, Teil, Anteil und Ganzem in Bildern erarbeiten (1.5 - 1.7).

Diagnoseaufgabe 2: Anteile von Mengen berechnen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
c)	2/8	I: Die Zahlen werden miteinander verrechnet. II: Das „von“ wird als „Minus“ interpretiert bzw. es wird der Anteil für den Rest angegeben: (8 - 6)/8	Grundlage: Das Bilden von Einheiten am Material erarbeiten (1.1). Die Rolle von Zähler und Nenner für das Bilden von Anteilen erarbeiten (1.2). Den Kalkül mit der Vorstellung verbinden (1.3 - 1.4). Aufbau: Wenn Fördereinheit 1 inhaltlich bewältigt ist, wird in Fördereinheit 2 der Kalkül auch für größere Zahlen erarbeitet, bei denen man nicht mehr gerne Bilder zeichnet. Darüber hinaus Vorstellungen flexibilisieren durch verschiedene Aufgabentypen und Darstellungswechsel (2.1 - 2.3).

B1C Wie können wir fördern, Anteile von Mengen zu nehmen?

1 Anteile von Mengen bestimmen

1.1 Erarbeiten (20 - 25 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Handlungsgestützt Anteile von Mengen bestimmen

Material: Große Bruchstreifen, Plättchen, Mengen- und Anteilskarten, Aufgabentafel, Protokoll-Lösungshilfe (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer); KV: Protokollbogen (mindestens 1 pro Person)

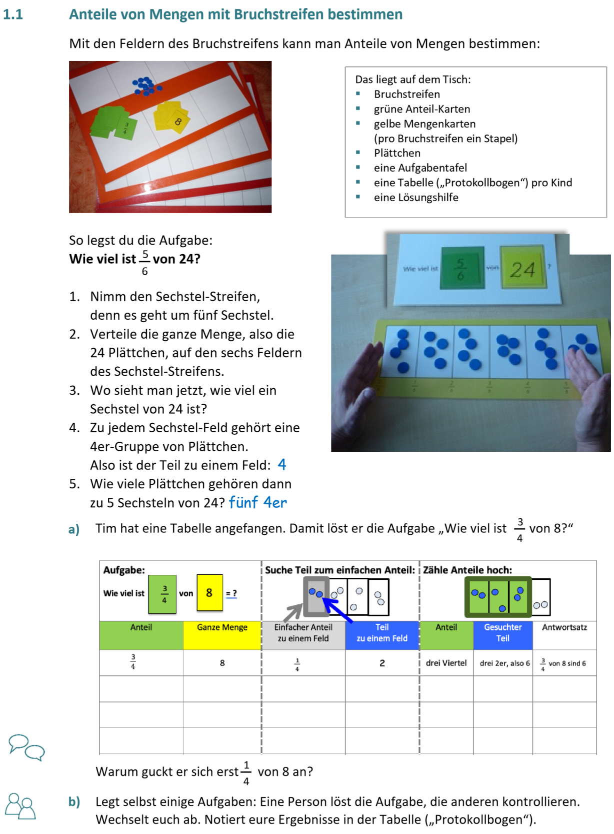
Umsetzung: a) PA oder GA, dann UG, b) Aufgabengenerator (PA oder GA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile von Mengen mit Material bestimmen. Dabei bilden sie gleich große Gruppen (wie der Nenner vorgibt) und betrachten mehrere Gruppen (wie der Zähler vorgibt). Die Teil-Ganzes-Beziehung ist hier sowohl der Anteil 3/4 als auch das Verhältnis 6 von 8 Plättchen.
Beim gleichmäßigen Verteilen der Plättchen auf dem Bruchstreifen gehen die Lernende unterschiedlich vor: Entweder sie verteilen die Plättchen einzeln „reihum“ oder sie führen im Kopf eine Division durch.
Das Protokoll dient zur Unterstützung der Handlung und ist sprachfördernd zur Einübung der strukturierenden Denksprache. Wichtig ist, zu besprechen, was die einzelnen Spalten bedeuten und genau deutlich zu machen, was zum Anteil gehört („Wo sieht man im Streifen 5/6?“).

Denksprache:
- Ich nehme mir den 4tel Bruchstreifen, weil ich ¾ markieren möchte.
- **Der Anteil** ist 3/4.
- 8 Plättchen sind **das Ganze**.
- In jedem Feld des Bruchstreifens liegt eine **2er**-Gruppe.
- Weil ich den Anteil 3/4 suche, muss ich 3 Felder des Bruchstreifens betrachten.
- Insgesamt ist **der Teil** 6 Plättchen.

Impulse:
- Was ist der Anteil? (3/4 oder 6 von 8)
- Was ist das Ganze?
- Welcher Bruchstreifen passt zu ...? Warum?
- Wo siehst du den Teil und das Ganze im Bild?
- Wie groß sind deine Gruppen? Warum?
- Wie viele gleich große Gruppen hast du? Warum?

Methode:
Beispielaufgabe gemeinsam konkret handelnd lösen. Dann zwei bis drei weitere Aufgaben lösen (ggf. zunächst ohne Ausfüllen des Protokolls). Lernende ihr Vorgehen beschreiben lassen.
Differenzierungspotenzial durch Hinzufügen oder Wegnehmen schwierigerer Mengenkarten. Protokoll-Lösungshilfe kann an die eigene Tabelle angelegt werden, um die Lösung der jeweiligen Aufgabe zu erarbeiten.



1.1 Anteile von Mengen mit Bruchstreifen bestimmen

Mit den Feldern des Bruchstreifens kann man Anteile von Mengen bestimmen:

Das liegt auf dem Tisch:
- Bruchstreifen
- grüne Anteil-Karten
- gelbe Mengenkarten
  (pro Bruchstreifen ein Stapel)
- Plättchen
- eine Aufgabentafel
- eine Tabelle („Protokollbogen“) pro Kind
- eine Lösungshilfe

So legst du die Aufgabe:
Wie viel ist $\frac{5}{6}$ von 24?

1. Nimm den Sechstel-Streifen, denn es geht um fünf Sechstel.
2. Verteile die ganze Menge, also die 24 Plättchen, auf den sechs Feldern des Sechstel-Streifens.
3. Wo sieht man jetzt, wie viel ein Sechstel von 24 ist?
4. Zu jedem Sechstel-Feld gehört eine 4er-Gruppe von Plättchen.
   Also ist der Teil zu einem Feld: 4
5. Wie viele Plättchen gehören dann zu 5 Sechsteln von 24? fünf 4er

a) Tim hat eine Tabelle angefangen. Damit löst er die Aufgabe „Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von 8?“

Aufgabe: Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von 8 = ?		**Suche Teil zum einfachen Anteil:**		**Zähle Anteile hoch:**		
Anteil	Ganze Menge	Einfacher Anteil zu einem Feld	Teil zu einem Feld	Anteil	Gesuchter Teil	Antwortsatz
$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{4}$	2	drei Viertel	drei 2er, also 6	$\frac{3}{4}$ von 8 sind 6

Warum guckt er sich erst $\frac{1}{4}$ von 8 an?

b) Legt selbst einige Aufgaben: Eine Person löst die Aufgabe, die anderen kontrollieren. Wechselt euch ab. Notiert eure Ergebnisse in der Tabelle („Protokollbogen“).

1.2 Erarbeiten

Ziel: Zusammenhang zwischen dem Anteil und dem gesuchten Teil operativ erarbeiten

Material: Große Bruchstreifen, Plättchen (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer),
ggf. Protokoll-Lösungshilfe; KV: Protokollbogen

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG, c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen den Zusammenhang zwischen dem gesuchten Teil und dem Anteil operativ erarbeiten. Dabei wird in a) der Zähler und in b) der Nenner variiert.
In a) wird der gesuchte Teil immer um 4 größer, weil der Teil zu einem Feld 4 ist und immer eine 4er-Gruppe mehr betrachtet wird.
In b) entspricht der gesuchte Teil dem Teil auf einem Feld, weil der Zähler immer 1 ist. Der gesuchte Teil wird kleiner, weil die Plättchen auf mehr Felder verteilt werden.

Die Beschreibung der Tabelle hilft, die Muster zu entdecken.

Impulse:
- S.o. (1.1)
- Was verändert sich? Warum?

Lösung zu a):

$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$ von 24 ist 4
$\frac{1}{6}$	4	$\frac{2}{6}$	8	$\frac{2}{6}$ von 24 ist 8
$\frac{1}{6}$	4	$\frac{3}{6}$	12	$\frac{3}{6}$ von 24 ist 12

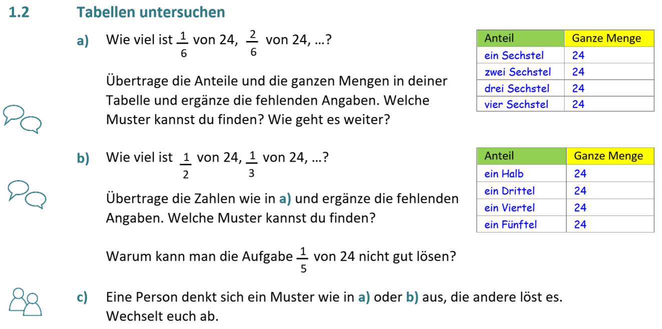
Der gesuchte Teil wird um 4 größer, weil der Teil zu einem Feld 4 (eine 4er-Gruppe) ist und ich immer eine 4er-Gruppe mehr betrachte. Ich betrachte immer eine Gruppe mehr, weil sich der Zähler um 1 erhöht.

Lösung zu b):

$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$ von 24 ist 12
$\frac{1}{3}$	8	$\frac{1}{3}$	8	$\frac{1}{3}$ von 24 ist 8
$\frac{1}{4}$	6	$\frac{1}{4}$	6	$\frac{1}{4}$ von 24 ist 6
$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$ von 24 ist 4

Der gesuchte Teil wird kleiner, weil ich die Plättchen auf mehr Gruppen verteilen muss. Damit gibt es in jeder Gruppe weniger Plättchen.

Methode zu c):
Lernende stellen sich z.T. nicht lösbare Aufgaben. Das kann am Material geklärt werden.



1.2 Tabellen untersuchen

a) Wie viel ist $\frac{1}{6}$ von 24, $\frac{2}{6}$ von 24, …?

Übertrage die Anteile und die ganzen Mengen in deiner Tabelle und ergänze die fehlenden Angaben. Welche Muster kannst du finden? Wie geht es weiter?

Anteil	Ganze Menge
ein Sechstel	24
zwei Sechstel	24
drei Sechstel	24
vier Sechstel	24

b) Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 24, $\frac{1}{3}$ von 24, …?

Übertrage die Zahlen wie in **a)** und ergänze die fehlenden Angaben. Welche Muster kannst du finden?

Anteil	Ganze Menge
ein Halb	24
ein Drittel	24
ein Viertel	24
ein Fünftel	24

Warum kann man die Aufgabe $\frac{1}{5}$ von 24 nicht gut lösen?

c) Eine Person denkt sich ein Muster wie in **a)** oder **b)** aus, die andere löst es. Wechselt euch ab.

1.3 Üben

Ziel: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Aufgaben erkennen und nutzen

Material: Große Bruchstreifen, Plättchen (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer)

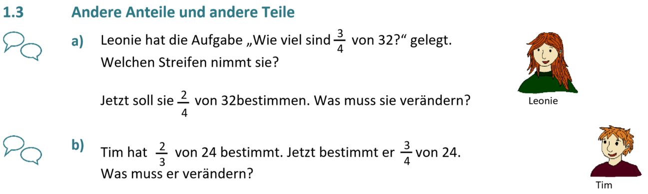
Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Aufgaben erkennen und nutzen. Für lernstarke Lernende ist die Aufgabe ggf. unterfordernd, aber durch die Einforderung, die Rechnungen zu begründen, kann die Besprechung der Aufgabe ausreichend kognitiv aktivierend sein.

Impulse:

- Welchen Streifen nimmt sie jetzt? Warum?
- Wie groß ist der Teil, den du betrachtest? Warum?

Methode:
Die operative Variation (3/4→2/4) kann am Material überprüft werden.



1.3 Andere Anteile und andere Teile

a) Leonie hat die Aufgabe „Wie viel sind $\frac{3}{4}$ von 32?“ gelegt.
Welchen Streifen nimmt sie?

Jetzt soll sie $\frac{2}{4}$ von 32bestimmen. Was muss sie verändern?

b) Tim hat $\frac{2}{3}$ von 24 bestimmt. Jetzt bestimmt er $\frac{3}{4}$ von 24.
Was muss er verändern?

1.4 Üben

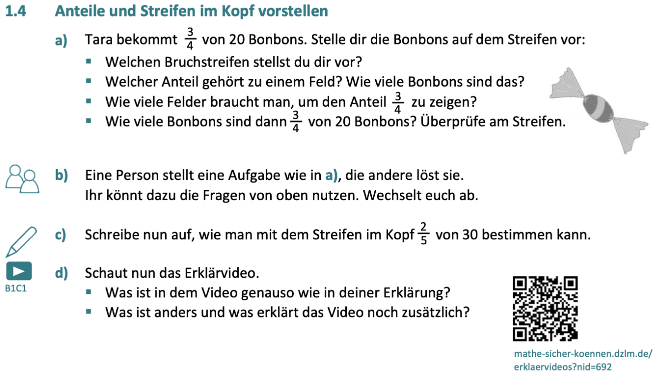
Ziel: Mentale Vorstellung stärken

Material: Ggf. große Bruchstreifen, Plättchen (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer); Erklärvideo

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) Aufgabengenerator (PA), c) EA, d) PA

Methode:
Die Lernenden sollen die verinnerlichte Handlung aus den vorherigen Aufgaben nun als mentales Bild nutzen und sich so vom Material ablösen. Die Lehrperson moderiert Aufgabe als gemeinsame Vorstellungsübung, d. h. diktiert Aufgaben und bittet Lernende, sich alles im Kopf vorzustellen.

Erklärvideo:
Das Erklärvideo B1C1 (Anteile von Mengen bestimmen) systematisiert die erarbeiteten Inhalte: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=692
Bei Bedarf könnten Sie als Lehrkraft den Lernenden auch einen Auszug aus dem Transkript zum Video bereitstellen. Dies könnte besonders schwächere Lernende beim Vergleich der Formulierungswahl unterstützen.



1.4 Anteile und Streifen im Kopf vorstellen

a) Tara bekommt $\frac{3}{4}$ von 20 Bonbons. Stelle dir die Bonbons auf dem Streifen vor:
- Welchen Bruchstreifen stellst du dir vor?
- Welcher Anteil gehört zu einem Feld? Wie viele Bonbons sind das?
- Wie viele Felder braucht man, um den Anteil $\frac{3}{4}$ zu zeigen?
- Wie viele Bonbons sind dann $\frac{3}{4}$ von 20 Bonbons? Überprüfe am Streifen.

b) Eine Person stellt eine Aufgabe wie in **a)**, die andere löst sie.
Ihr könnt dazu die Fragen von oben nutzen. Wechselt euch ab.

c) Schreibe nun auf, wie man mit dem Streifen im Kopf $\frac{2}{5}$ von 30 bestimmen kann.

d) Schaut nun das Erklärvideo.
- Was ist in dem Video genauso wie in deiner Erklärung?
- Was ist anders und was erklärt das Video noch zusätzlich?

2 Anteile von Mengen berechnen

2.1 Erarbeiten

Ziel: Ablösung vom Material, Erklärung der Rechnung

Material: Erklärvideo

Umsetzung: a) UG, b),c), d) EA, dann UG, e) PA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen sich vom Material lösen und die Rechnung erklären. Hier wird ein rechnerisches Verfahren eingeführt. Nachdem die Lernenden Vorstellungen zum Anteil-Nehmen von Mengen aufgebaut haben, kann diese Aufgabe dazu eingesetzt werden, um die bisherigen mentalen Vorstellungen mit dem Rechenverfahren und der Sprache zu vernetzen.
Diese Aufgabe kann schwache Lernende dabei unterstützen, die Rechnung Schritt für Schritt zu erarbeiten - ggf. mithilfe der Lehrkraft. Lernstarke Kinder könnten dabei unterstützt werden, ihre Rechnungen, die sie ggf. bereits entdeckt hatten oder intuitiv tätigen, zu begründen (dividieren, weil man gleich große Gruppen bildet und multiplizieren, weil man mehrere Gruppen nimmt).

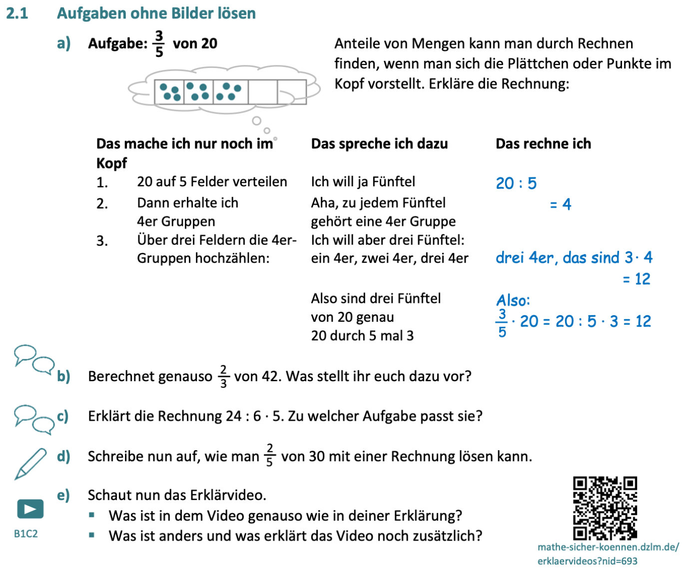
Denksprache:

- Das Ganze sind meine 42 Plättchen. Diese Plättchen muss ich auf drei Felder des Drittel-Bruchstreifens verteilen. Davon nehme ich 2 Felder mit je 14 Plättchen.

Impulse zu c):

- Wo sehe ich die 4er-Gruppen in der Rechnung?
- Wieso rechnen wir geteilt? Warum mal 5?

Erklärvideo:
Das Erklärvideo B1C2 (Anteile von Mengen berechnen) systematisiert die erarbeiteten Inhalte:
https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=693



2.1 Aufgaben ohne Bilder lösen

a) **Aufgabe: $\frac{3}{5}$ von 20**

Anteile von Mengen kann man durch Rechnen finden, wenn man sich die Plättchen oder Punkte im Kopf vorstellt. Erkläre die Rechnung:

Das mache ich nur noch im Kopf	Das spreche ich dazu	Das rechne ich
1. 20 auf 5 Felder verteilen	Ich will ja Fünftel	20 : 5
2. Dann erhalte ich 4er Gruppen	Aha, zu jedem Fünftel gehört eine 4er Gruppe	= 4
3. Über drei Feldern die 4er-Gruppen hochzählen:	Ich will aber drei Fünftel: ein 4er, zwei 4er, drei 4er	drei 4er, das sind 3 · 4 = 12
	Also sind drei Fünftel von 20 genau 20 durch 5 mal 3	Also: $\frac{3}{5} \cdot 20 = 20 : 5 \cdot 3 = 12$

b) Berechnet genauso $\frac{2}{3}$ von 42. Was stellt ihr euch dazu vor?

c) Erklärt die Rechnung 24 : 6 · 5. Zu welcher Aufgabe passt sie?

d) Schreibe nun auf, wie man $\frac{2}{5}$ von 30 mit einer Rechnung lösen kann.

e) Schaut nun das Erklärvideo.

- Was ist in dem Video genauso wie in deiner Erklärung?
- Was ist anders und was erklärt das Video noch zusätzlich?

B1C2

mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=693

2.2	**Üben**
Ziel:	Anteile berechnen; Muster erkennen
Material:	Ggf. große Bruchstreifen und Plättchen (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer)
Umsetzung:	a) EA, dann UG, b) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile berechnen und Muster erkennen. Schwächere Lernende brauchen z.T. noch Rückgriff auf das Material. Dies sollte hier aber nur noch zur Kontrolle geschehen, da das Ziel die Ablösung vom Material darstellen sollte. Wichtig ist es dann, vorstellungsgebundene Begründungen einzufordern (Wie sähe das jetzt am Material aus? Welchen Streifen müsste man denn nehmen? etc.).

Lösung zu a):
1., 2., 3., 5. Päckchen: Anteil bleibt gleich, Ganzes wird jeweils 2mal / 3mal so groß bzw. halbiert. 4. Päckchen: Ganzes bleibt gleich, Anteil wird halbiert → Streifen hat doppelt so viele Felder → halb so großer Teil.

Impulse:

- Was passiert, wenn sich das Ganze verdoppelt mit dem gesuchten Teil? Warum?

Methode:
Lernende nach ihrem Vorgehen fragen. Muster können auch nachträglich am Material erklärt werden.
Bei nicht lösbaren Aufgaben am Material klären, warum sie nicht lösbar sind.

2.2 Anteile berechnen

a) Berechnet die Aufgaben wie in **2.1 a)**. Was fällt dir auf?

(1) $\frac{3}{4}$ von 8 ist $\boxed{6}$
↓·2 ↓·2
(2) $\frac{3}{4}$ von 16 ist $\boxed{12}$
↓·2 ↓·2
(3) $\frac{3}{4}$ von 32 ist $\boxed{24}$

(1) $\frac{2}{5}$ von 5 ist $\boxed{2}$
↓·3 ↓·3
(2) $\frac{2}{5}$ von 15 ist $\boxed{6}$
↓·3 ↓·3
(3) $\frac{2}{5}$ von 45 ist $\boxed{18}$

(1) $\frac{4}{5}$ von 10 ist $\boxed{8}$
↓·2 ↓·2
(2) $\frac{4}{5}$ von 20 ist $\boxed{16}$
↓·2 ↓·2
(3) $\frac{4}{5}$ von 40 ist $\boxed{32}$

(1) $\frac{3}{4}$ von 48 ist $\boxed{36}$
↓:2 ↓:2
(2) $\frac{3}{8}$ von 48 ist $\boxed{18}$
↓:2 ↓:2
(3) $\frac{3}{16}$ von 48 ist $\boxed{9}$

(1) $\frac{7}{9}$ von 72 ist $\boxed{56}$
↓:2 ↓:2
(2) $\frac{7}{9}$ von 36 ist $\boxed{28}$
↓:2 ↓:2
(3) $\frac{7}{9}$ von 18 ist $\boxed{14}$

b) Eine Person stellt eine Aufgabe wie in **a)**, die andere löst sie. Wechselt euch ab.

2.3 Üben

Ziel: Systematisch Zusammenhänge zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen in verschiedenen Richtungen und Repräsentationen erkennen

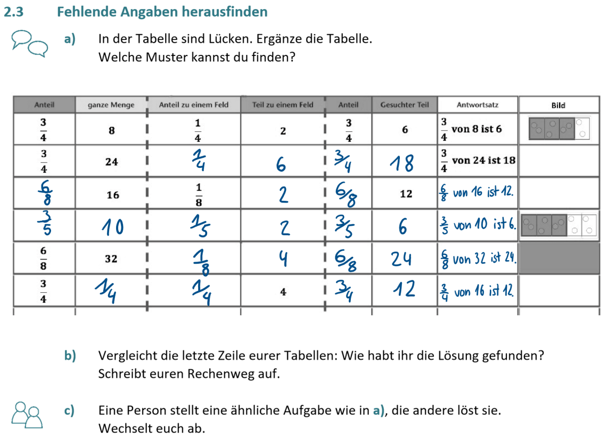
Material: Ggf. große Bruchstreifen, Plättchen (z. B. aus dem MSK-Materialkoffer)

Umsetzung: a), b) EA, dann UG, c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen systematisch Zusammenhänge zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen in verschiedenen Richtungen und Repräsentationen erkennen.
Schwer fällt meist Zeile (6), da die Aufgabenrichtung anders ist: Aus dem Anteil 3/4 und dem Teil 4 lassen sich weder das Ganze noch der Teil zu 3/4 direkt errechnen. Es sind Umstrukturierungen der gewohnten Zugangsweisen notwendig, die jedoch zu einer Flexibilisierung des Denkens beitragen können.

Methode:
Bei großen Schwierigkeiten mit (6) auch konkret am Material legen lassen und weitere strukturgleiche Aufgabe lösen lassen (z. B. Anteil 2/3 und Teil zu 1/3 ist 5). Bei nicht lösbaren Aufgaben am Material klären, warum sie nicht lösbar sind.

Impulse:
- Welchen Streifen stellst du dir vor?
- Wo siehst du die 4?
- Wo siehst du den Zähler/den Nenner?



2.3 Fehlende Angaben herausfinden

a) In der Tabelle sind Lücken. Ergänze die Tabelle.
Welche Muster kannst du finden?

Anteil	ganze Menge	Anteil zu einem Feld	Teil zu einem Feld	Anteil	Gesuchter Teil	Antwortsatz	Bild
$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	6	$\frac{3}{4}$ von 8 ist 6	
$\frac{3}{4}$	24	$\frac{1}{4}$	6	$\frac{3}{4}$	18	$\frac{3}{4}$ von 24 ist 18	
$\frac{6}{8}$	16	$\frac{1}{8}$	2	$\frac{6}{8}$	12	$\frac{6}{8}$ von 16 ist 12.	
$\frac{3}{5}$	10	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{3}{5}$	6	$\frac{3}{5}$ von 10 ist 6.	
$\frac{6}{8}$	32	$\frac{1}{8}$	4	$\frac{6}{8}$	24	$\frac{6}{8}$ von 32 ist 24.	
$\frac{3}{4}$	1/4	1/4	4	3/4	12	$\frac{3}{4}$ von 16 ist 12.	

b) Vergleicht die letzte Zeile eurer Tabellen: Wie habt ihr die Lösung gefunden?
Schreibt euren Rechenweg auf.

c) Eine Person stellt eine ähnliche Aufgabe wie in a), die andere löst sie.
Wechselt euch ab.