Mathe sicher können

Didaktischer Kommentar
zum Diagnose- und Fördermaterial

B2 Gleichwertige Brüche verstehen

Inhalt

Zitierbar als: Schink, Andrea, Pöhler-Friedrich, Birte, Prediger, Susanne, Wessel, Lena & Böing, Lena (2026). Didaktischer Kommentar zu den Mathe-sicher-können-Diagnose- und Förderbausteinen B2: Gleichwertige Brüche verstehen und berechnen. Open Educational Resources unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd/#B2

Hinweis zu verwandtem Material: Dieser didaktische Kommentar gehört zu dem MSK-Diagnose- und Fördermaterial, das gedruckt beim Cornelsen-Verlag und frei online verfügbar ist. Online finden sich auch Fortbildungsfilme, Erklärvideos und flexible digitale Bruchstreifen für Lernende, unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#B2 bzw. https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html.

B2A Gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden – Didaktischer Hintergrund

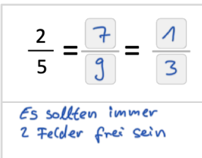
Lerninhalt

Unter gleichwertigen Brüchen versteht man solche, die denselben Anteil (von einem Ganzen, wie in Baustein B1A oder von Mengen, Baustein B1C) beschreiben: Wer 1/2 von einem Blechkuchen bekommt, bekommt genauso viel Kuchen-Anteil, wie jemand, der 2/4 oder 4/8 Pizza bekommt. In diesem Baustein wird Gleichwertigkeit in der Vorstellung vom Anteil von einem Ganzen erarbeitet. Für Lernende ist dieser Begriff nicht intuitiv, deshalb wird hier meist von gleich großen Anteilen gesprochen. Vorbereitet wird der spätere Übergang zum rechnerischen Erweitern (**Baustein B2B**), indem Lernende Brüche feiner und gröber einteilen.

Gleich große Anteile als Voraussetzung für das Verständnis gleichwertiger Brüche

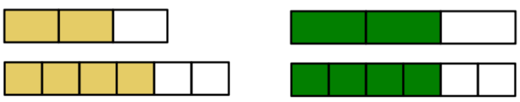
Die Gleichwertigkeit von Brüchen als *gleich große Anteile* ist für manche Lernende nicht leicht zu verstehen. Einige aktivieren z.T. nicht tragfähige Vergleichsstrategien (siehe Abbildung) oder verwechseln *gleich groß*, auch wegen der sprachlichen Nähe, mit *gleichnamig* (siehe Baustein **B3A**).

Typischer Fehler:
Nicht tragfähige Vergleichsstrategie



Bei der Erarbeitung der Gleichwertigkeit spielt der Bezug zum Ganzen eine zentrale Rolle, denn wenn das Ganze nicht gleich groß ist, darf man nicht einfach die Teile vergleichen. Mit den digitalen Bruchstreifen wird dieser Aspekt immer wieder thematisiert, da man die erzeugten digitalen Bruchstreifen erst gleichlang ziehen muss.

Bedeutung des Ganzen: Vergleich von 2/3 und 4/6 mit den digitalen Bruchstreifen



Die Begründung der Gleichwertigkeit erfolgt dabei einerseits über die gleiche Länge der markierten Teile und die gleichlangen Streifen („Beide Brüche sind gleichwertig, weil die gesamten Streifen und die markierten Teilstreifen gleichlang sind"). Diesen Aspekt können die Lernenden direkt visuell erkennen und aus den Streifen ablesen (wie bei einem Mess-Gerät im sogenannten Mess-Fokus).

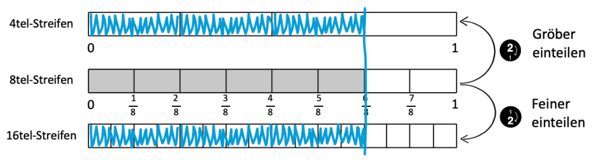
Verfeinern und Vergröbern

Um später das rechnerische Erweitern begründen zu können, ist es aber sehr wichtig, auch das feinere Einteilen als Umwandlung selbst zu versprachlichen: „Ich finde einen gleichwertigen Bruch, indem ich das Ganze feiner / gröber einteile. Dann wird auch der Teil feiner eingeteilt. Beide Brüche sind gleichwertig, weil der Teil und das Ganze gleich groß bleiben". Wichtig ist, dass der Teil und das Ganze gleichmäßig verfeinert/vergröbert werden und so die Beziehung vom Teil zum Ganzen gleichbleibt.

Beim Vergröbern wird die Strukturierung des Ganzen und des Teils gröber, d. h. die einzelnen Stücke/Felder werden größer. Beim Verfeinern wird die Strukturierung feiner, d. h. die einzelnen Felder werden kleiner. Wichtig ist, dass beim Verfeinern (und Vergröbern) jeweils *sowohl der Teil als auch das Ganze gleichmäßig verfeinert (bzw. vergröbert) werden*. Durch die gleichzeitige Verfeinerung von Teil und Ganzem ergibt sich ein neuer Anteil, der genauso groß ist wie der ursprüngliche.

In der Streifentafel findet man gröber/feiner eingeteilte Streifen durch Schauen nach oben oder unten.

Aufgabe 2.3: Blick nach oben / unten vom 8tel-Streifen aus



Wichtig ist, herauszustellen, dass beim Vergröbern zwar die einzelnen Felder vom Ganzen größer werden, nicht jedoch der Anteil: Die *Einteilung* von Teil und Ganzem hat *keinen Einfluss auf die Größe des Teils* und damit des Anteils.

Die Erarbeitung der Begriffe *gröber und feiner einteilen* sollte vorstellungsgebunden, an die Struktur der Streifentafel angelehnt, geschehen. Wichtig ist, dass beide Umwandlungsprozesse einander umkehren.

Veranschaulichung und Material

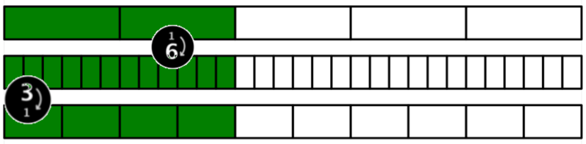
Bruchstreifen

Für den Erstzugriff auf das Finden gleich großer Anteile werden wie in Baustein **B1A** einzelne gleich lange Bruchstreifen als mathematische Veranschaulichung von Fortschrittsbalken am PC genutzt. Diese sind z.T. bereits vorstrukturiert, z.T. handelt es sich um leere Streifen, für die die notwendige Strukturierung erst gefunden werden muss. Gleich große Anteile werden hier als gleich lange Markierungen in gleich langen Streifen interpretiert.

Digitale Bruchstreifen

Mit den digitalen Bruchstreifen lassen sich die Verfeinerungsstrukturen aktiv handelnd entdecken. Es kann sowohl verfeinert als auch vergröbert werden.

Feiner und gröber einteilen im digitalen Bruchstreifen



Die Arbeit mit den digitalen Bruchstreifen muss sprachlich begleitet und angeleitet werden, damit die Lernenden ein tiefergehendes Verständnis aufbauen können. Eine Anleitung zu den Funktionen der digitalen Bruchstreifen finden Sie online beim Baustein.

Zu beachten ist, dass die Lernenden die Streifen gleichlang ziehen müssen, um sie zu vergleichen. Nur mit den digitalen Bruchstreifen ist es möglich, Bruchstreifen nicht gleichlang zu machen und in ihrer Länge zu variieren. Das bietet gute Gesprächsanlässe.

Streifentafel

Eine Systematisierung der Bruchstreifen stellt die Streifentafel dar: In der Streifentafel sind zunehmend verfeinerte Bruchstreifen übereinander angeordnet (insgesamt 18 Streifen; vom 2tel- bis zum 10tel-Streifen alle, danach nur ausgewählte wie die Teiler von 100 bis zum 100tel-Streifen).

Diese Tafel wird auch in späteren Bausteinen zusätzlich zu den digitalen Bruchstreifen genutzt, um die Gleichwertigkeit von Brüchen und Prozenten (und steht auch digital zur Verfügung) und das Gleichnamigmachen zu erarbeiten (Bausteine **B2B, B2C, B3A**), Brüche und Prozente zu ordnen (Baustein **B3B**) und zu addieren (Baustein **B4A**).

Gleich große Anteile in der **Streifentafel**

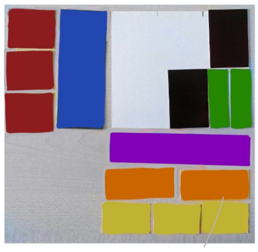
In der Streifentafel liegen gleich große Anteile auf einer vertikalen Linie, so können Lernende mit einem Lineal *mehrere gleich große Anteile gleichzeitig* identifizieren. Die gefundenen Muster können auf der Tafel mit abwischbaren Folienstiften eingetragen werden.

Einsatz vom Lineal: Gleich große Anteile liegen auf einer Linie

Im MSK-Materialkoffer befindet sich als Anschauungsmittel für Erarbeitung und Diskussion in Gruppen auch eine große Tafel. Unter vam.dzlm.de/vams/apps/Bruchstreifentafel.html ist sie auch fürs Smartboard verfügbar.

Bruchpuzzle

Beziehungen im **Bruchpuzzle**



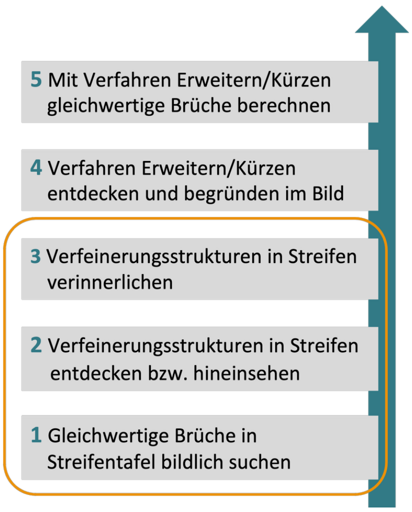
Für die Übertragung und Flexibilisierung der Vorstellung zur Gleichwertigkeit von den eher linear gedachten Bruchstreifen hin zu flächigen Ganzen wird das Bruchpuzzle aus dem Materialkoffer eingesetzt: Gleich große Anteile werden hier über das Auslegen der Puzzleteile bzw. -fläche identifiziert. So lässt sich etwa das Viertel vom Ganzen mit dem Achtel bzw. Zwölftel vom Ganzen auslegen und beschreiben.

In der Förderung

Lernpfad mit fünf gestuften Lernzielen

Es ist wichtig, im Unterricht die verschiedenen Lernstufen mit ihren speziellen Lernzielen im Blick zu haben und wie diese aufeinander aufbauen. Die Förderung ist in diesem Baustein nach dem folgendem Lernpfad konzipiert, der die fünf gestuften Lernziele zeigt:

Lernpfad im Baustein B2A/B (nach Prediger 2006)



Ziel ist es, dass die Lernenden am Ende des Lernpfades mit den Verfahren des Kürzens und Erweiterns Brüche berechnen und begründen können. Dafür müssen sie die Operationen inhaltlich an Bruchstreifen begründen können. Viel Zeit sollte dabei vor allem in das Entdecken, Versprachlichen und Verinnerlichen der *Verfeinerungsstrukturen* investiert werden. Die Lernstufen 2 - 4 dienen dazu, dass Lernende nicht nur die Verfahren beherrschen, sondern dazu tragfähige Vorstellungen aufbauen. Nur so können sie die Verfahren anschließend begründen. Diese Lernstufen sollten also im Unterricht nicht übersprungen werden. In Baustein **B2A** werden die ersten drei Stufen fokussiert:

Auf Stufe 1 sollen Lernende gleichwertige Brüche in der Streifentafel bildlich suchen. Sie entdecken, dass mehrere Brüche denselben Anteil beschreiben. Zum Vergleichen von Anteilen muss das Ganze gleich groß sein. Das intuitive Verständnis der Gleichwertigkeit (gerechtes Verteilen von Schokoriegeln) kann gut anhand der Bruchstreifen veranschaulicht werden: Anteile sind gleich groß, wenn das Ganze gleich groß bzw. der Bruchstreifen und die markierten Teile gleich lang sind.

Die Streifentafel gibt den Lernenden die Möglichkeit, flexibel gleichwertige Anteile zu finden, ohne bereits Verfeinerungsstrukturen in dieser entdeckt zu haben oder die Rechenregeln des Erweiterns und Kürzens anwenden zu können.

Auf Stufe 2 und 3 sollen sie Verfeinerungsstukturen entdecken, versprachlichen und verinnerlichen. Das sind die Stufen, bei denen es sich lohnt, viel Zeit zu investieren, damit dann in weiteren Stufen die Rechnung mit inhaltlichem Verständnis gefüllt werden kann. Verfeinerungsstrukturen können mit den digitalen Bruchstreifen handelnd entdeckt werden.

Stufe 4 und 5 werden in Baustein **B2B** thematisiert.

Bedeutungsbezogene Denksprache

Um deutlich über die Verfeinerungsstrukturen und die Gleichwertigkeit zu sprechen, ist es wichtig, dass die Lernenden zwischen Ganzem, einzelnen Feldern und dem Teil (der markierten Felder) unterscheiden.

- ... ist genauso groß wie ...
- .. ist gleichwertig zu ...
- … werden zusammengefasst zu…
- ... wird eingeteilt/zerlegt in ...
- Ich habe den Drittel-Bruchstreifen **feiner** eingeteilt.
- Das **Ganze** bleibt gleich. Die Anzahl der Kuchenstücke, die Lisa essen kann wird mehr, dafür werden die Stücke entsprechend kleiner. Der Anteil bleibt gleich.
- Da die Länge des Bruchstreifens und die Länge des markierten Teils gleich bleiben, sind die beiden Anteile **gleichwertig/gleich groß**.

Aufbau der Förderung

Fördereinheit 1 (Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden) beginnt zunächst mit einer intuitiven Nutzung der Gleichwertigkeit, indem Anteile in verschiedene bereits strukturierte Bruchstreifen übertragen werden. Dieses Vorgehen ist ähnlich zu dem in Baustein **B1B**, da die Streifen an Fortschrittsbalken angelehnt werden.

In **Fördereinheit 2 (Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden)** wird der Aufbau der Streifentafel erarbeitet: Mittels Orientierungsübungen („Wo findet man 1/2, etc.?“) erlangen Lernende Sicherheit im Identifizieren und Nutzen der zentralen Strukturen und beschreiben sie als Muster. Die bereits intuitiv genutzte Gleichwertigkeit wird auf die Streifentafel übertragen. Anschließend werden die Begriffe feiner und gröber einteilen erarbeitet und mit den zwei Blickrichtungen (nach oben: Vergröbern; nach unten: Verfeinern) in der Streifentafel bzw. den zwei Operationen im digitalen Streifen verknüpft. Die zuvor vorgegebenen und genutzten Strukturen (Aufteilung des Streifens) werden nun selbst hergestellt und es findet eine erste Loslösung vom konkreten Anschauungsmaterial statt: Die Streifentafel hat wegen ihrer endlichen Struktur nur eine begrenzte Anwendbarkeit. So werden erste Überlegungen zu einer Systematisierung angestellt.

Die Einheit schließt mit der Flexibilisierung der Vorstellung von Gleichwertigkeit in Situationen sowie in echten flächigen Darstellungen (Bruchpuzzle; siehe auch Baustein **B1A**).

Digitale Medien zum Baustein

Alle digitalen Medien werden kontinuierlich ausgebaut und sind stets aktuell verlinkt unter
mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#b2

- Mit den **digitalen Bruchstreifen** lässt sich das feinere und gröbere Einteilen visualisieren. So wird der Vorstellungsaufbau unterstützt.
  https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html
  Mit dem **Erklärvideo** lassen sich die erarbeiteten Inhalte mit den Kindern systematisieren.
  1) Gleichwertige Anteile finden (B2A). https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=694
- Im **didaktischen Themenfilm** für Lehrkräfte werden die aufgeführten Aspekte mit Fallbeispielen illustriert und aufgezeigt, worauf es bei der Förderung ankommt (nach Registrierung zugänglich). B2: mathe-sicher-koennen.dzlm.de/themenvideo/brueche3
- Die digitale Diagnose wird in zunehmend mehr Bundesländern im **MSK-Online-Check** möglich.

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Springer Spektrum.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Praxis der Mathematik in der Schule, 48(11), 8–12.

B2A Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 15 - 20 Minuten

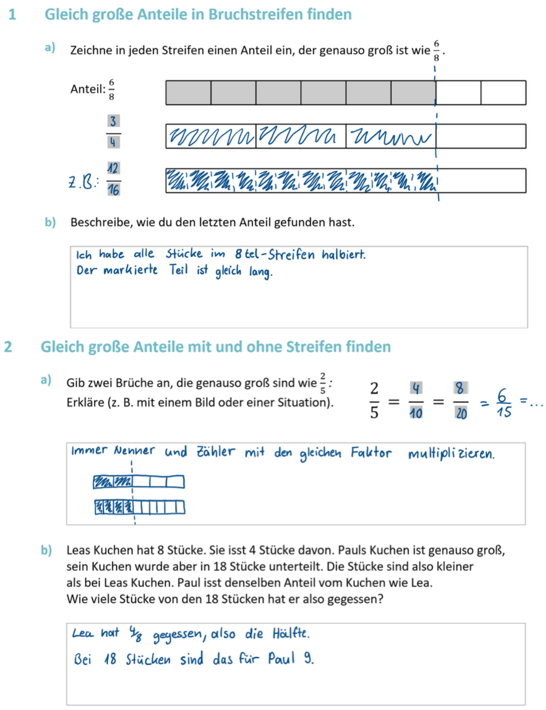
Hinweise zur Durchführung:

Lernende müssen mit der Idee gleich großer Anteile in Bruchstreifen vertraut gemacht werden.

„Du sollst in jedem Streifen einen Anteil markieren, der genauso groß ist wie 6/8, aber anders heißt.“ Keine Lösungsidee für 1b) vorwegnehmen.

2 a) Hinweis auf „anders benannte“ Anteile bzw. auf 1). Nicht auf die Bruchstreifen verweisen, damit individuelle Erklärungen nicht ausgeschlossen werden.

2 b) Inhaltlich komplex. Zur Verständnissicherung auch paraphrasieren, ohne die Vorstellungen zu sehr einzuengen (z. B. durch die Aufforderung, Kuchen zu zeichnen etc.).


1 Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

a) Zeichne in jeden Streifen einen Anteil ein, der genauso groß ist wie $\frac{6}{8}$.

Anteil: $\frac{6}{8}$

$\frac{3}{4}$

z. B.: $\frac{12}{16}$

b) Beschreibe, wie du den letzten Anteil gefunden hast.

Ich habe alle Stücke im 8tel-Streifen halbiert. Der markierte Teil ist gleich lang.

2 Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

a) Gib zwei Brüche an, die genauso groß sind wie $\frac{2}{5}$: Erkläre (z. B. mit einem Bild oder einer Situation).

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{6}{15} = \ldots$

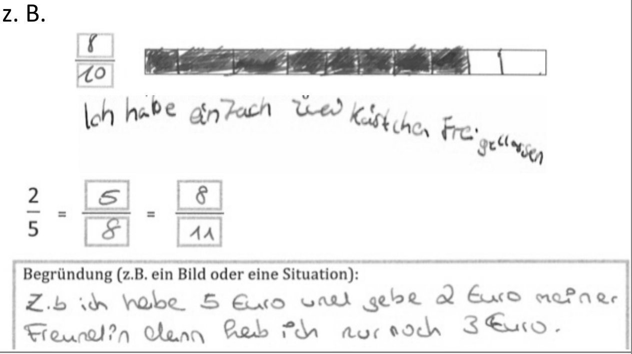
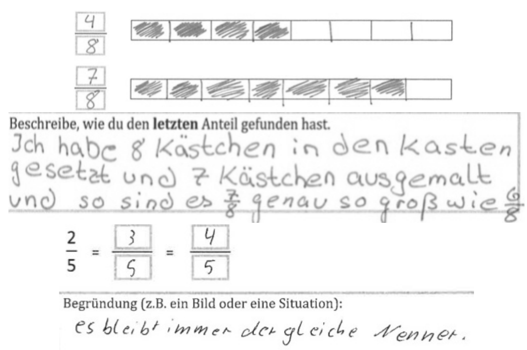
Immer Nenner und Zähler mit den gleichen Faktor multiplizieren.

b) Leas Kuchen hat 8 Stücke. Sie isst 4 Stücke davon. Pauls Kuchen ist genauso groß, sein Kuchen wurde aber in 18 Stücke unterteilt. Die Stücke sind also kleiner als bei Leas Kuchen. Paul isst denselben Anteil vom Kuchen wie Lea. Wie viele Stücke von den 18 Stücken hat er also gegessen?

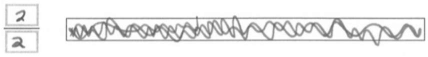
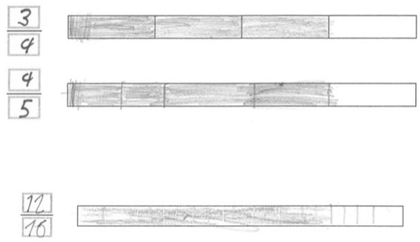
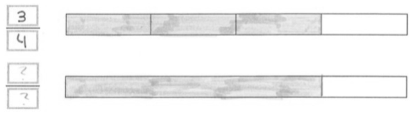
Lea hat 4/8 gegessen, also die Hälfte. Bei 18 Stücken sind das für Paul 9.

Hinweise zur Auswertung

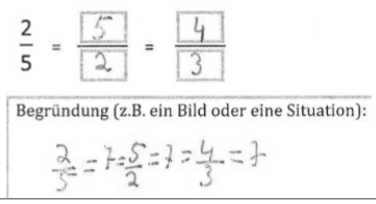
Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1), 2.a)	z. B.  	Gleich große Anteile werden über die Differenz von Zähler und Nenner bzw. den fehlenden Teil zum Ganzen bestimmt. Ist dieser Wert gleich, sind die Anteile gleich groß (hier beim Streifen z. B. 6/8 = 8/10, da 8 - 6 = 10 - 8 = 2).	Erarbeitung der Bedeutung von *gleich groß* (1.1 - 1.2). Erarbeitung der Strukturierung des Streifens durch den Anteil (2.1 - 2.3). Erweiterung über die Streifentafel hinweg (2.4) und Üben in einer anderen flächigen Repräsentation (2.6).
	z. B.  	Gleich große Anteile werden auf die Größe der einzelnen Stücke/Felder (Einheiten) des Bruchstreifens bezogen, alle Achtelbrüche wären dann gleich groß. Werden 4 und 3 als Zähler genommen, so kann dahinter auch das Halbieren der 6 und der 8 in 6/8 stehen.	

Diagnoseaufgabe 1: Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a), b)	z. B. 	*Gleich groß* wird auf das Verhältnis von Teil und Rest übertragen und nicht auf verschiedene Anteile.	Erarbeitung der Bedeutung von *gleich groß* (1.1 - 1.2).
	z. B.  Es wird der Anteil 1 angegeben.	Eventuell bereitet das Strukturieren Schwierigkeiten: Wenn keine Stücke/Felder vorgegeben sind, kann man auch nur den ganzen Streifen ausmalen.	
	z. B. 	Es wird ungenau gezeichnet. Wenn ein anderer Anteil dabei entsteht (erstes Bild), kann auch eine nicht tragfähige Bruchvorstellung zugrunde liegen. Wenn der richtige Anteil bestimmt wurde, aber der Streifen nicht bündig abschließt, kann *gleich groß* eventuell nicht mit der Länge der Streifen ausreichend verknüpft werden.	Erarbeitung der Strukturierung des Streifens durch den Anteil (2.1 - 2.3). Erweiterung über die Streifentafel hinweg (2.4) und Üben in einer anderen flächigen Repräsentation (2.6).
	z. B. 	Was *gleich groß* für Streifen bedeutet, scheint verstanden worden zu sein. Die Umsetzung deutet auf Schwierigkeiten hin, den Teil geeignet zu strukturieren.	

Diagnoseaufgabe 2: Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)	Nur der Zähler oder nur der Nenner wird geändert.	U.U. haben Lernende das Erweitern als Multiplizieren im Kopf, haben aber keine inhaltliche Vorstellung von der Operation erworben.	Erarbeitung der Bedeutung von *gleich groß* (1.1 - 1.2). Erarbeitung der Strukturierung des Streifens durch den Anteil (2.1 - 2.3). Erweiterung über die Streifentafel hinweg (2.4) und Üben in einer anderen flächigen Repräsentation (2.6).
	z. B. 	*Gleich groß* wird auf die Summe von Zähler und Nenner bezogen.	
b)	„Paul hat 4 Stücke gegessen."	Teil und Anteil werden verwechselt: Paul isst denselben Anteil wie Lea, aber nicht denselben Teil (= 4 Stücke).	Erarbeitung der Gleichwertigkeit von Anteilen (2.1 - 2.3). Bearbeiten von Situationen zur Gleichwertigkeit (2.5).
	„Paul hat 14 Stücke gegessen: 18 - 4."	Der Teil von Lea wird von Pauls Ganzem abgezogen.	
	„Paul hat 6 Stücke gegessen: 18 - 12 = 6."	Leas Ganzes und Teil werden addiert und von Pauls Ganzem subtrahiert.	Überprüfung und bei Bedarf Wiedererarbeitung des Bruchverständnisses (**B1 A**).
	„Paul hat 8 Stücke gegessen."	Das Ganze von Lea wird als Teil von Paul interpretiert.	

B2A Wie können wir fördern, gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen zu finden?

1 Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

1.1 **Erarbeiten**

Ziel: Anteile in Ladebalken intuitiv (über die Länge des Streifens) vergleichen

Material: -

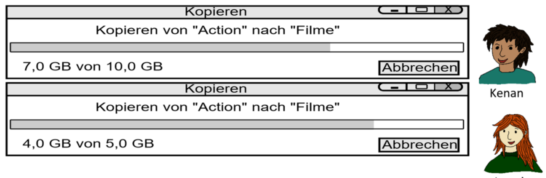
Umsetzung: a) UG, b) EA/PA, c) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile in Ladebalken intuitiv vergleichen und dabei entdecken, dass der größere Anteil nicht über absolute Betrachtung der GB (etwa des noch zu ladenden Teils) bestimmt werden kann (größere GB-Angabe steht beim kleineren Anteil und nicht beim größeren). Das kann man zusätzlich mit einem Gegenbeispiel vertiefen: Bei 3 von 4 GB hat der Computer weniger geladen als bei 8 von 10 GB, auch wenn nur noch 1 GB (und nicht 2 GB) fehlt. Systematische Größenvergleiche werden in **B3B** thematitisiert.
Wichtig ist es, den Zusammenhang von Teil, Anteil und Ganzem anzusprechen und an **B1A** anzuknüpfen. Der lebensweltliche Kontext der *Fortschrittsbalken* wird bereits in **B1B** eingeführt.

Impulse:
- Wo wären mehr Felder? Wie viele wären das?
- Wäre ein Feld im ersten Streifen kleiner oder größer? (→ Mehr Felder im ersten Streifen / 7 von 10 Feldern / kleiner.)
- Warum passt der Downloadstreifen zum Bruchstreifen?
- Woran erkennst du, dass die Anteile nicht gleich groß sind? (Das Ganze ist gleich groß, aber der Teil ist bei Leonie größer als bei Kenan).
- Warum passt der Anteil zum entsprechenden Bruchstreifen?
- Wie bist du vorgegangen, um gleich große Anteile zu bestimmen? (Ziel: Verfeinern und Vergröbern oder?)

1.1 Anteile in Ladebalken vergleichen

a)



Kenan und Leonie wollen beide einen Film herunterladen.
- Welcher Computer hat im Moment mehr GB geladen?
- Welcher Computer hat den größeren Anteil geladen, ist also schon weiter?

b) Vergleiche die Anteile aus a) (7 von 10 und 4 von 5) auch mit Bruchstreifen:
Welchen Anteil hat Leonie, welchen Anteil hat Kenan bereits geladen? Wer hat mehr?

c) Die Anteile von Leonie und Kenan sind nicht gleichwertig, also nicht gleich groß.
Welche Anteile wären gleich groß? Finde Beispiele und erkläre.

Zum Beispiel wären 4/5 und 8/10 gleich groß.
Kenan bräuchte nur 1/10 mehr und dann wären die markierten Teile gleich lang.
Oder aber beide haben einen GB weniger geladen: Leonie 3/5 und Kenan 6/10. Dann wären die markierten Teile auch gleich lang. Oder Kenan hat 2/10 und Leonie 1/5 geladen, usw.. Leonie hat nur halb so viele GB insgesamt. Deshalb muss sie nur halb so viele GB geladen haben für einen gleichgroßen Anteil wie Kenan.

1.2 **Erarbeiten**

Ziel: Weitere gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

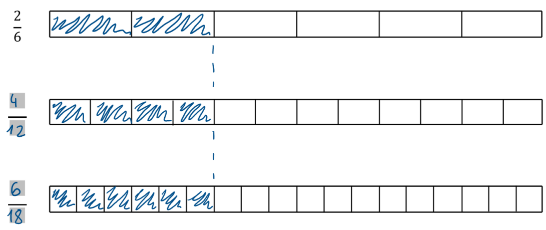
Umsetzung: EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen gleich große Anteile in Bruchstreifen finden und dabei die Verfeinerungsstrukturen kennenlernen. Eine typische Schwierigkeit ist, dass der Anteil gleichbleiben soll, aber der Streifen wechselt. Lernende nennen dann alle Brüche „2/6“. Dies ist nicht falsch, dennoch sollte auch explizit nach einer anderen Beschreibung vom Anteil gefragt werden.

Impulse:
- Wie kann der Anteil im 12tel-Streifen noch heißen, gibt es weitere Möglichkeiten?
- Warum passt der Anteil zum Bild? Wo siehst du den Teil (den Zähler) und wo siehst du das Ganze (den Nenner)?
- Aus wie vielen gleich großen Feldern besteht das Ganze? Wie viele gleich große Felder sind farblich markiert und bilden den Teil?

1.2 Gleich große Anteile ablesen und einzeichnen

Finde mit den Bruchstreifen Anteile, die genauso groß sind wie zwei Sechstel.



1.3 **Erarbeiten**

Ziel: Anteile vergleichen mit verschiedengroßen Teilen und Ganzen

Material: Tablets und die digitalen Bruchstreifen: https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

Umsetzung: PA, dann UG

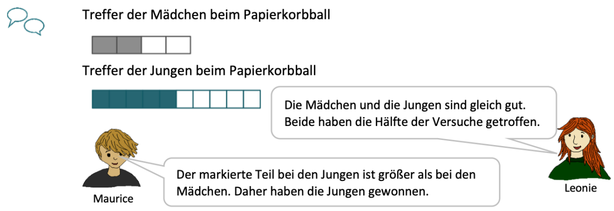
Hintergrund: Die Lernenden sollen mithilfe einer produktiven Irritation erkennen, dass es beim Vergleichen der Anteile auf die Beziehung zwischen Teil und Ganzem ankommt. Hier ist das Ganze nicht gleich groß. Die Lernenden dürfen (und sollen) die Streifen mithilfe der digitalen Anwendung gleichlang ziehen, um sie zu vergleichen. So können sie erkennen, dass die Anteile gleich groß sind, obwohl es sich um unterschiedliche Anzahlen von Treffern und unterschiedliche Anzahlen von Versuchen handelt.

Impulse:
- Warum dürft ihr die Bruchstreifen gleichlang machen? (→ Es kommt auf die Beziehung vom Teil zum Ganzen an.)
- Wie könnt ihr anhand der Bruchstreifen ablesen, dass beide gleich gut sind?
- Wie hilft euch die Darstellung der Brüche in den Bruchstreifen bei der Beantwortung der Frage? (→ 2 von 4, 5 von 10 deutlich erkennbar).

Digitale Bruchstreifen: Sie ermöglichen, Strukturen selbstständig zu entdecken. Eine sprachliche Begleitung und Anleitung ist dabei wichtig, damit die Lernenden ein tiefergehendes Verständnis aufbauen können. Falls nicht genügend Endgeräte vorhanden sind, wird die Anwendung am Smartboard/Beamer geöffnet und gemeinsam bearbeitet

1.3 Anteile vergleichen – Auf das Ganze kommt es an

Maurice und Leonie vergleichen die Treffer beim Papierkorbball.



Stelle den Anteil mit den digitalen Bruchstreifen nach. Wer hat Recht?

Zuerst sieht es so aus, als wäre der markierte Teil bei den Jungen größer, weil 5 Felder mehr sind als 2 Felder. Aber ich darf nicht nur die Anzahl der markierten Felder vergleichen. Ich muss immer das Ganze mit anschauen, denn entscheidend ist die Beziehung vom Teil zum Ganzen. Die Mädchen haben zwar nur 2 mal getroffen, aber sie hatten auch nur 4 Würfe, also haben sie 2 von 4 mal getroffen. Die Jungen haben zwar 5 mal getroffen, aber sie hatten auch nur 10 Würfe, also 5 von 10. Wenn ich die Bruchstreifen gleichlang ziehe, also das Ganze gleichgroß darstelle, dann sehe ich, dass Leonie Recht hat: Beide haben die Hälfte von der Gesamtzahl ihrer Würfe (dem Ganzen) getroffen.

1.4 **Erarbeiten**

Ziel: Einsichten in Gleichwertigkeit vertiefen

Material: Tablets und die digitalen Bruchstreifen: https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

Umsetzung: EA, dann UG

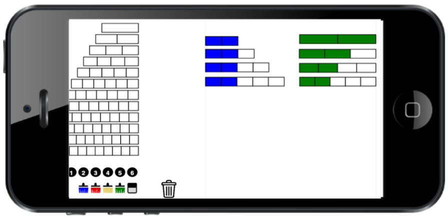
Hintergrund:
Die Lernenden sollen mithilfe der digitalen Bruchstreifen ihre Einsichten in die Gleichwertigkeit von Brüchen vertiefen. Der Teil bleibt gleich, während sich das Ganze und somit auch die Beziehung zwischen Teil und Ganzem verändert. Die linke Darstellung mit den digitalen Bruchstreifen regt zum Nachdenken über die Gleichwertigkeit bei gleichbleibendem Teil an. Die rechte Darstellung verdeutlicht die Veränderung der Beziehung und dass Anteile sich vor allem dann gut vergleichen lassen, wenn die Bruchstreifen gleichlang sind.

Denksprache:
- ... ist (nicht) genauso groß wie ...
- .. ist (nicht) gleichwertig zu ...
- Die Länge des Bruchstreifens und die Länge des markierten Teils...

1.4 Anteile vergleichen in digitalen Bruchstreifen

Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

a) Jonas hat mit den digitalen Bruchstreifen zwei unterschiedliche Bilder erstellt zum Vergleich von Brüchen.
- Welche Brüche vergleicht er?
- In welchem Bild sieht man gut, dass der Teil stets gleich groß bleibt? Warum sieht man in diesem Bild den Anteil nicht so gut?
- In welchem Bild kann man die Anteile besser vergleichen? Warum sieht man darin erst auf den zweiten Blick, dass die Zähler der Brüche gleich sind?
- Welches Bild passt besser zu dem Argument von Maurice aus Aufgabe 1.3, welches zu dem von Leonie?
- Wie hilft dir das, um in Aufgabe **1.3** zu argumentieren?



Im linken Bild sieht man gut, dass der Teil gleichgroß bleibt: Es sind immer 2 Felder markiert. Man kann Anteile aber nur sinnvoll vergleichen, wenn die Ganzen gleich groß sind (Bild rechts). Die Länge des markierten Teils allein reicht nicht – entscheidend ist die Beziehung zwischen Teil und Ganzem. Das linke Bild passt zu Maurice. Er schaut nur auf die Anzahl der markierten Felder. Das rechte Bild passt zu Leonies Argument. Sie achtet darauf, dass die Ganzen gleich groß sind.

b) Erstelle mit den digitalen Bruchstreifen auch für diese Brüche zwei Bilder, so wie Jonas. Was fällt dir auf? $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{8}{12}$
- Wie verändern sich die Ganzen? Wie verändern sich die Teile?
- Wie verändern sich die Anteile?

2 Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

2.1 **Erarbeiten**

Ziel: Strukturen der Streifentafel erkunden

Material: Streifentafel(n), Folienstifte (fürs Smartboard auch vam.dzlm.de/vams/apps/Bruchstreifentafel.html)

Umsetzung: a) EA, b) UG

Hintergrund: Lernende sollen die Struktur der Streifentafel operativ erarbeiten und zum Vergleichen von Anteilen nutzen. Zu erkennen, dass 2/6 = 3/9 gilt, fällt einigen Lernenden schwer. Oft gehen sie bestimmte Reihen durch (z. B. „immer Zähler und Nenner verdoppeln: 2/6 = 4/12 = 8/24“) und übersehen dabei andere gleichwertige Anteile wie 3/9.
Das „Wundern“ über den zusätzlichen Bruch trägt zu einer Flexibilisierung des Denkens bei. Das Phänomen muss hier nicht endgültig geklärt werden.
Lernende gucken häufig nur von oben nach unten und nicht umgekehrt von unten nach oben in der Streifentafel. Hier kann man gezielt Brüche mit kleinerem Nenner aufgreifen.

Methode: Große und kleine Streifentafel nutzen: An der kleinen Tafel können Lernende zunächst alleine Muster finden und anschließend gemeinsam an der großen Tafel besprechen / erklären.

Impulse:

- Was passiert mit den Anteilen dieser Reihe? (→ Sie werden kleiner. Es werden mehr Felder im Streifen.)
- Was ist bei allen Streifen unterschiedlich – und was bleibt unverändert?

Denksprache:

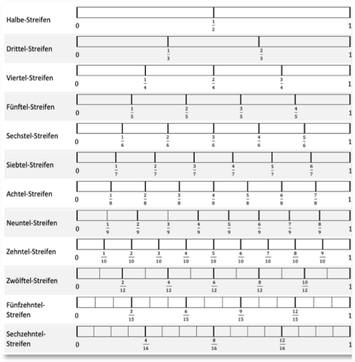
- ... ist genauso groß wie ...
- .. ist gleichwertig zu ...

2.1 Muster in der Streifentafel finden und nutzen

Mit Bruchstreifen kann man verschiedene Anteile miteinander vergleichen. In der Streifentafel sind viele unterschiedliche Bruchstreifen, die man immer wieder benutzen kann.

a) Untersuche die Streifentafel.
- Welche Streifen sind dort angeordnet und wie sind sie angeordnet?
- Wo findest du $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... ?

b) Wie sieht man in der Streifentafel, ob $\frac{3}{4}$ genauso groß ist wie $\frac{9}{12}$?



(Größere Streifentafel im Zusatzmaterial)

a) In der Streifentafel sind alle Streifen gleich lang.
Sie unterscheiden sich nur darin, in wie viele gleich große Felder das Ganze zerlegt ist.
Nach unten werden es immer mehr und kleinere Felder → feinere Einteilung. Nach oben werden es weniger und gröbere Felder → gröbere Einteilung.
Einen Bruch wie 1/5 finde ich im Streifen, der in fünf gleich große Felder geteilt ist.

b) Ich nutze das Lineal und schaue, ob die markierten Teile auf derselben senkrechten Linie enden.
Wenn das so ist, sind die Anteile gleich groß.
Obwohl es mehr Felder sind, bleibt die Länge des Teils gleich.
Darum sind die Anteile gleichwertig.

2.2 **Erarbeiten**

Ziel: Gleichwertige Anteile erklären

Material: Erklärvideo

Umsetzung: a), b) EA, c), d) PA

Hintergrund: Die Lernenden sollen gleichwertige Anteile in der Streifentafel untersuchen und erklären, was Gleichwertigkeit bedeutet.

Erklärvideo: Dient zur Vertiefung oder Sicherung und Systematisierung des bereits Gelernten und greift die wichtigsten Aspekte auf, die zum Verstehen der Gleichwertigkeit zentral sind.
https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=694

2.2 Gleichwertige Anteile erklären

a) Finde möglichst viele gleichwertige (also gleich große) Anteile in der Streifentafel zu $\frac{1}{3}$. Was fällt Dir auf?

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = ...$

b) Erkläre: Was genau bedeutet der Ausdruck „Anteile sind gleichwertig“?

Satzbausteine, die dir dabei helfen können:
... das Ganze ...
... der Teil ...
... der Anteil ...
... tel – Felder ...
... beide Male gleich groß ...
... genauso lang wie ...
... ist gleichwertig zu ...

b) Anteile sind gleichwertig, wenn das Ganze und der Teil beide Male gleich lang sind. Auch wenn das Ganze feiner oder gröber eingeteilt wird, ist der neue Anteil genauso groß wie der ursprüngliche und deshalb gleichwertig zu ihm.

B2A

c) Schaue dir das Erklärvideo an.
Vergleiche deine Erklärungen mit dem Erklärvideo.

d) Nennt euch gegenseitig einen Anteil aus der Streifentafel und findet dazu gleich große Anteile. Wechselt euch ab.

mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=694

2.3 **Erarbeiten**

Ziel: Vergröbern und Verfeinern kennenlernen

Material: Digitale Bruchstreifen

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen anhand der digitalen Bruchstreifen entdecken, dass sie durch das feinere (bzw. gröbere) Einteilen der Felder im Bruchstreifen gleichwertige Anteile erhalten. Dabei sehen sie die Struktur des Verfeinerns und Vergröberns in die Bruchstreifen hinein. Der Blick sollte bewusst auf die Struktur der Streifen gelenkt werden. Der Fokus auf einen Ausschnitt verdeutlicht die strukturellen Zusammenhänge zwischen den Streifen und damit zwischen den Anteilen.
Die Begriffe *feiner und gröber einteilen* sollten an dieser Stelle geklärt werden.

Rückbezug zu 1.4: Es muss wieder thematisiert werden, dass das Ganze gleich groß gemacht werden muss, dass der Anteil nur gleichwertig ist, wenn der markierte Teil auch gleichlang ist.

Digitale Bruchstreifen:
Verfeinerungsstrukturen können mit den digitalen Bruchstreifen handelnd entdeckt werden. Dies bietet den Lernenden Gelegenheit, gleichwertige Anteile durch Verfeinern und Vergröbern von Bruchstreifen selbstständig zu finden.
https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

Impulse zu b):

- Was passiert mit den Achteln im 4tel-Streifen?
- Wie viele Felder werden immer zusammengefasst?
- Was passiert im 16tel-Streifen? Wie viele Felder werden da aus einem Achtel? (→ Aus 2 Achteln wird 1 Viertel / aus 1 Achtel werden 2 16tel.)
- Warum kann bei 3/6 man Vergröbern mit 4 keinen gleichwertigen Anteil erzielen?

2.3 Gröber oder feiner einteilen

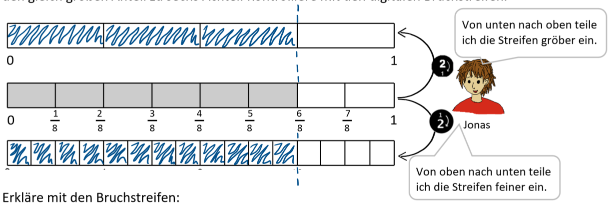
Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

a) Nutzt die digitalen Bruchstreifen zur Bearbeitung der Aufgabe:
Stellt $\frac{1}{3}$ mit den digitalen Bruchstreifen dar.
Zieht 2 oder 4 auf euren Drittel-Bruchstreifen.

Was könnt ihr beobachten?
- Was passiert, wenn ihr andere Zahlen wählt?
- Was passiert, wenn ihr andere Bruchstreifen wählt und über diese eine Zahl zieht?
- Wie verändert sich der Teil, wie verändert sich das Ganze, wenn der Streifen feiner eingeteilt wird?

b) Stellt $\frac{3}{6}$ dar und zieht 2 auf den Streifen. Was könnt ihr beobachten?

c) Markiere im Viertel-Streifen und im Sechzehntel-Streifen jeweils den gleich großen Anteil zu sechs Achtel. Kontrolliere mit den digitalen Bruchstreifen.



Erkläre mit den Bruchstreifen:
- Wie genau unterscheiden sich die drei Bruchstreifen?
- Was passiert beim „feiner einteilen" (mit dem Ganzen, dem Teil, dem Anteil)?
- Was passiert beim „gröber einteilen" (mit dem Ganzen, dem Teil, dem Anteil)?

Beim feiner und gröber Einteilen verändert sich die Anzahl und Größe der Felder. Aber das Ganze, der Teil und der Anteil bleiben gleich.
- Wenn ich feiner einteile, werden das Ganze und der Teil in mehrere und kleinere Felder eingeteilt.
- Wenn ich gröber einteile, wird aus mehreren kleineren Feldern ein größeres Feld.
Der neue Anteil ist jweils gleichwertig zu dem alten Anteil, weil das Ganze und der Teil beide Male gleich groß bleiben.

Satzbausteine, die dir helfen können:

↓ *Wenn ich feiner einteile:*
- Aus einem großen Feld werden immer ...
- ... ist genauso groß wie ...
- ... ist gleichwertig zu ...
- ... wird eingeteilt/zerlegt in ...
- ... werden kleiner.
- Insgesamt sind es jetzt ... feinere Felder.
- ...

↑ *Wenn ich gröber einteile:*
- Aus mehreren kleineren Feldern wird ... ist genauso groß wie ...
- ... ist gleichwertig zu ...
- ... werden zusammengefasst zu ...
- ... werden größer.
- Insgesamt sind es jetzt ... gröbere Felder.

2.4 Üben

Ziel: Struktur im Streifen selbst herstellen beim gröber und feiner Einteilen durch Abgleich mit der Streifentafel

Material: Streifentafel(n), Folienstifte (fürs Smartboard auch vam.dzlm.de/vams/apps/Bruchstreifentafel.html)

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA, dann UG; c) EA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Verfeinerungsstrukturen in der Streifentafel nutzen und selbst feiner und gröber einteilen.
Der Blick nach oben in der Streifentafel fällt z.T. schwer. Hier kann es helfen an der Streifentafel die Bedeutung von *feinerem und gröberem Einteilen* zu festigen: Ihre Struktur gibt Orientierung (nach oben wird in der Tafel vergröbert, nach unten verfeinert).
Der Zusammenhang zwischen 4/6 und 6/9 ist für einige Lernende nicht selbstverständlich: Oft finden sie Anteile über Verdopplungsstrategien von Zähler und Nenner. Das Beispiel kann helfen, zu starre Vorstellungen zur Gleichwertigkeit zu vermeiden.
In Aufgabenteil b) müssen Lernende den Zwischenschritt über das Vergröbern gehen.
Die Lernenden müssen den ganzen Streifen strukturieren – nicht nur den Teil. Zur Orientierung und Hilfe zur Strukturierung des Streifens kann man zunächst den Endstrich durchziehen wie in der Streifentafel. Die Streifentafel hilft bei Erarbeitung der Strukturierung.

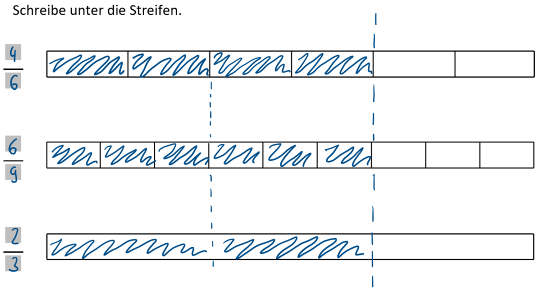
Denksprache:

- ist genauso groß wie
- ist gleichwertig zu
- zusammengefasst zu
- feiner eingeteilt
- Aus … Feldern werden … Felder. Also erhalte ich den …tel-Bruchstreifen.
- Da die Länge des Bruchstreifens und die Länge des markierten Teils gleichbleiben, sind die beiden Anteile **gleichwertig**.
- Wenn wir den Sechstel-Bruchstreifen mit 2 **feiner einteilen**, dann hat der Streifen zweimal so viele kleinere **Felder**. Das **Ganze** bleibt gleich. Die Anzahl der Felder wird mehr, dafür werden sie entsprechend kleiner. **Der Anteil bleibt gleich.**

2.4 Gleich große Anteile ablesen und einzeichnen

a) Zeichne $\frac{4}{6}$ ein. Welche Anteile sind genauso groß wie $\frac{4}{6}$?
Teile dafür den unteren Bruchstreifen passend ein.
Finde mit der Streifentafel weitere Anteile, die genauso groß sind wie vier Sechstel.

- Wo hast du gröber eingeteilt, wo feiner eingeteilt?
- Wie viele Felder sind es insgesamt?
- Wie viele Felder gehören zum Teil?
  Schreibe unter die Streifen.



Bei 4/6 sind es insgesamt 6 Felder. Der Teil besteht aus 4 Feldern.
Bei 2/3 sind es insgesamt 3 Felder. Der Teil besteht aus 2 Feldern.
Bei 6/9 sind es insgesamt 9 Felder. Der Teil besteht aus 6 Feldern.

Von 4/6 zu 2/3 habe ich gröber eingeteilt: Aus insgesamt sechs Feldern wurden drei Felder und aus vier markierten Sechstel-Feldern wurden zwei markierte Drittel-Felder, weil jeweils 2 Felder zu einem gröberen zusammengefasst wurden.
Von 2/3 zu 6/9 habe ich jedes Feld dreimal so fein eingeteilt: Auch der markierte Teil, also 2 Felder, wurden in dreimal so viele Felder eingeteilt.
Alle drei Anteile sind gleichwertig, weil die Länge des Bruchstreifens und die Länge des markierten Teils gleichbleiben.

b) Man findet durch Verfeinern des Sechstel-Streifens nicht so leicht eine Anzahl von Neunteln, die zusammen genauso groß ist wie $\frac{4}{6}$. Warum?
Welcher Streifen kann dir beim Verfeinern von Sechsteln zu Neunteln weiterhelfen?

Sechstel kann man nicht direkt feiner einteilen, sodass Neuntel entstehen, weil 2 Neuntel-Felder schon größer sind als 1 Sechstel-Feld. Man kann aber den Drittel-Streifen nutzen, weil 4/6 gleichwertig zu 2/3 ist (gröber eingeteilt). Und 2/3 kann man dreimal so fein einteilen: Jedes Feld wird in 3 feinere Felder geteilt. 2/3 sind also auch gleichwertig zu 6/9. Sechstel und Neuntel sind beide durch 3 teilbar. → Drittel-Streifen

c) Finde wie in a) gleich große Anteile zu $\frac{4}{10}$:
Zeichne dafür mehrere 20 cm lange Streifen untereinander und teile sie passend ein.
Was fällt dir bei der Einteilung der Streifen auf?

$\frac{2}{5}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{8}{20}$

10 tel zu 5 tel: vergröbert (2 Stücke → 1 Stück)
10 tel zu 15 tel: passt nicht immer
5 tel zu 15 tel: verfeinert (1 Stück → 3 Stücke)
20 tel zu 10 tel: vergröbert (2 Stücke → 1 Stück)

2.5 **Üben**

Ziel: Strukturen über die Streifentafel hinausgehend herstellen und nutzen

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA; c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden vertiefen das feinere Einteilen und verallgemeinern es auf Brüche, die nicht in der Streifentafel vorkommen.

2.5 Wenn die Streifentafel nicht reicht

a) Zeichne einen 20 cm langen Streifen und trage den Anteil $\frac{3}{4}$ ein.
Wie musst du den Streifen verfeinern, damit du den Anteil $\frac{6}{8}$ gut eintragen kannst?
Zeichne ihn in einen neuen Streifen.

b) Wie musst du den Streifen aus a) verfeinern, damit du $\frac{30}{40}$ gut eintragen kannst?

Ich muss den 20 cm langen Streifen aus a) so verfeinern, dass er in 40 gleich große Felder eingeteilt ist.
Dafür teile ich den Streifen zuerst in 4 gleichgroße Felder und jedes dieser Felder nochmal in 10 kleinere Felder.

c) Stellt euch gegenseitig Aufgaben zu Anteilen mit Bruchstreifen:
Gebt einen Anteil vor und findet gleich große Anteile. Wechselt euch ab.

2.6 **Üben**

Ziel: Systematisierend Gleichwertigkeit in Situationen untersuchen

Material: Streifentafel(n), Folienstifte (fürs Smartboard auch vam.dzlm.de/vams/apps/Bruchstreifentafel.html) oder digitale Bruchstreifen

Umsetzung: EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen ihre Einsichten in die Gleichwertigkeit von Brüchen vertiefen, indem sie sich anhand des Kontextes von Schokoriegeln verdeutlichen, dass der gleiche Anteil durch eine unterschiedliche Einteilung ausgedrückt werden kann. Dabei kann die gedankliche Anbindung an die Streifentafel helfen.

Impulse:
- Sarah bekommt doppelt so viele Stücke, aber denselben Anteil. Wie viele Stücke hat der Riegel dann insgesamt? → 24 (auch doppelt so viele Stücke).
- Steht die Zahl für alle Stücke vom Bruchstreifen oder nur für die Stücke vom Teil?

2.6 Gleich große Anteile in Situationen finden

Der Schokoriegel ist immer gleich groß, aber anders geschnitten.
Die Kinder bekommen alle gleich viel vom Schokoriegel, also denselben Anteil.
Es teilen sich immer drei Kinder einen ganzen Schokoriegel.
Ergänze die Tabelle und überprüfe mit der Streifentafel. Was fällt dir auf?

Kind	So viele Stücke hat der Schokoriegel	Teil vom Schokoriegel, den ein Kind bekommt	Anteil, den ein Kind bekommt
Tara	12	4	$\frac{4}{12}$ (= $\frac{1}{3}$)
Maurice	6	2	$\frac{2}{6}$
Rico	3	1	$\frac{1}{3}$
Dilara	9	3	$\frac{3}{9}$
Jonas	15	5	$\frac{5}{15}$
Sarah	24	8	$\frac{8}{24}$

Alle Anteile der Kinder sind gleichwertig zu 1/3. Jedes Kind bekommt unterscheidlich viele Stücke, aber immer einen gleich großen Anteil. In je mehr Stücke der Schokoriegel geteilt ist, desto mehr Stücke bekommt auch ein Kind. Aber nicht die Anzahl der Stücke entscheidet, sondern die Beziehung zwischen Teil und Ganzem, und die ist hier überall gleich.

2.7 **Üben**

Ziel: Gleichwertige Anteile mit flächigen Anschauungsmitteln bestimmen

Material: Bruchpuzzle

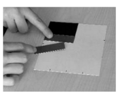
Umsetzung: a) UG, b) EA/PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen das feinere Einteilen über das Auslegen der Fläche beim Bruchpuzzle üben.

Impulse:
Was hat das mit feinerem Einteilen zu tun? (→ Durch das Auslegen kann man dieselbe Fläche durch verschiedene Puzzleteile beschreiben.)

2.7 Anteile und Teile vergleichen

a) Im Bruchpuzzle passt das graue Stück zweimal in das schwarze Stück hinein. Das schwarze Stück ist ein Siebtel, das graue ist ein Vierzehntel, also sind $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.
Das gelbe Stück passt dreimal in zwei orange Stücke.



- Das orangene Stück ist ein Achtel. Was ist dann das gelbe Stück? $\frac{1}{12}$
- Wie kannst du dann auch $\frac{2}{8}$ anders schreiben?

$$\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$$

b) Finde mit dem Puzzle weitere Anteile, die man anders schreiben kann.

B2B Gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden – Didaktischer Hintergrund

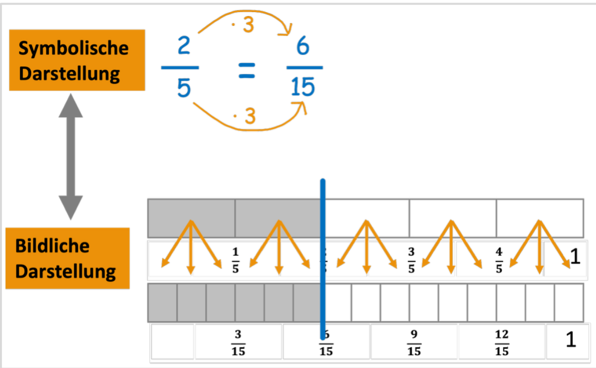
Lerninhalt

Erweitern/Kürzen und feiner/gröber einteilen

Die im Baustein **B2A** aufgebaute inhaltliche Vorstellung der Gleichwertigkeit von Anteilen fokussiert vor allem die Erarbeitung des feineren und gröberen Einteilens gleich langer Streifen, ohne diese jedoch schon explizit systematisch auf die entsprechende Rechenregel (die Rechnung des Erweiterns und Kürzens) zu beziehen.

Baustein **B2B** expliziert den Zusammenhang zwischen dem feineren Einteilen im Bruchstreifen und dem Erweitern eines formalen Bruchs sowie dem gröberen Einteilen und dem Kürzen.

Darstellungsvernetzung: Feiner einteilen vernetzt zu Erweitern



In dem Beispiel „2/5 erweitern mit 3“ können sich die Lernenden vorstellen, dass sie *mal drei* rechnen, weil sie *jedes Feld feiner einteilen*, jeweils in drei Felder. Das Ganze hat dann *dreimal so viele Felder*: 5 · 3 = 15. Der markierte Teil hat auch *dreimal* so viele Felder: 2 · 3 = 6. Das Verhältnis vom Teil zum Ganzen bleibt somit gleich und die Anteile sind *gleichwertig*. Wichtig ist hier die Darstellungsvernetzung: Die Lernenden sollen die Verfeinerungsstruktur im Bild und in der Rechnung verbalisieren und miteinander verknüpfen.

Beim Übergang vom inhaltlichen Denken (Verfeinern und Vergröbern) zur Rechenregel (Erweitern und Kürzen) sehen einige Lernende die Zahlbeziehungen in den reinen Zahlen („Einfach immer das Doppelte von Zähler und Nenner!“). Angelegt wird aber auch, diese Rechenregel in der Streifentafel, bzw. den (digitalen) Bruchstreifen begründen zu können, denn ohne die vorstellungsbezogene Begründung riskieren die Regeln, beliebig zu werden („Wieso nicht einfach Zähler und Nenner plus 5 nehmen?“).

Sollten sich die inhaltlichen Vorstellungen vom Verfeinern und Vergröbern als noch nicht hinreichend gefestigt zeigen, lohnt der Rückgriff auf Baustein **B2A**.

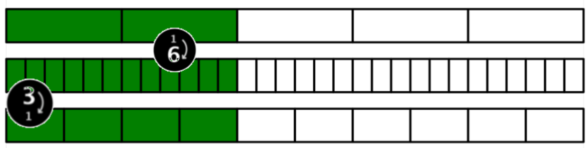
Für das Kürzen taucht auch nach sorgfältiger vorstellungsbezogener Herleitung eine zusätzliche Herausforderung auf: Man muss geeignete Zahlen zum Kürzen finden, die in Zähler und Nenner beide als Teiler enthalten sind. Dies fällt gerade schwächeren Lernenden, die nur wenige Zahlbeziehungen auswendig kennen und mit der Primzahlzerlegung nicht vertraut sind, oft schwer. In diesem Baustein werden daher als einfacher Weg zum Finden geeigneter Teiler die Vielfachreihen angeboten. Dabei wird nicht in einem Schritt der vollständig gekürzte Bruch bestimmt, sondern ggf. in mehreren. Vor dem vollständigen Kürzen muss die Rechenregel begründet werden.

Veranschaulichung und Material

Digitale Bruchstreifen und Streifentafel

Zentrales Anschauungsmittel sind wie bereits in Baustein **B2A** (die Streifentafel und) die digitalen Bruchstreifen, mit deren Hilfe die Rechnung mit den anschaulichen Vorstellungen vom Verfeinern und Vergröbern vernetzt wird.

Feiner und gröber einteilen im digitalen Bruchstreifen



Zentrales Ziel des Bausteins ist, die Loslösung von den Streifen zu initiieren, damit gleichwertige Brüche auch rechnerisch gefunden werden können.

Dazu dienen langsame Übergänge, zum Beispiel mit Kopfübungen, bei denen die Lernenden die Struktur der Streifentafel und der Bruchstreifen mental im Kopf aktivieren sollen, um die formale Rechnung strukturell begründen zu können.

In der Förderung

Bedeutungsbezogene Denksprache

Manche Lernende verknüpfen die Begriffe Erweitern und Kürzen mit ihren alltagssprachlichen Bedeutungen: Beim Erweitern eines Feldes wird es größer, beim Kürzen des Gehalts wird dies kleiner (vgl. Padberg & Wartha, 2017). Es ist wichtig, diese Vorstellungen abzugrenzen, denn Erweitern und Kürzen führen zu gleich großen Anteilen (siehe auch Baustein **B2A**).

- … **feiner** einteilen
- … in **dreimal so viele** Felder eingeteilt
- Die Anzahl der Felder hat sich **verdreifacht**.
- Das **Ganze/der Teil/der Anteil** bleibt gleich.

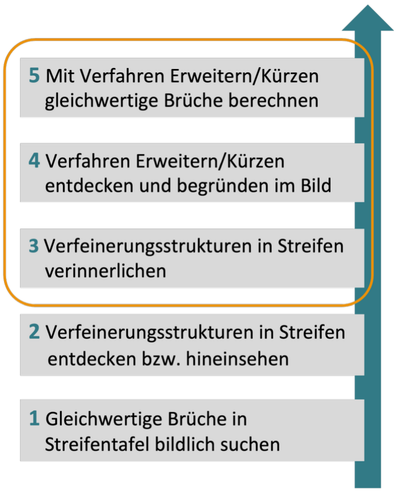
- Da die Länge des Bruchstreifens und die Länge des markierten Teils gleich bleiben, sind die beiden Anteile **gleichwertig**.

Lernpfad mit fünf gestuften Lernzielen

Es ist wichtig, im Unterricht die verschiedenen Lernstufen mit ihren speziellen Lernzielen im Blick zu haben und wie diese aufeinander aufbauen.

Die Förderung ist in diesem Baustein nach folgendem Lernpfad konzipiert, der die unterschiedlichen Lernstufen darstellt:

Lernpfad im Baustein B2A/B (nach Prediger 2006)



Ziel ist es, dass die Lernenden am Ende des Lernpfades mit den Verfahren des Kürzens und Erweiterns Brüche berechnen können. Dafür müssen sie die Operationen inhaltlich in Bild (anhand der Bruchstreifen) und Kontext begründen können. In Baustein **B2B** werden die oberen drei Stufen fokussiert: Die Verfeinerungsstrukturen bilden die Grundlage für die Rechenregeln des Erweiterns und Kürzens. Diese Strukturen müssen erst verinnerlicht sein, bevor die Rechnung dann inhaltlich begründet werden kann.

Aufbau der Förderung

In **Fördereinheit 1 (Gleichwertige Anteile im Kopf finden)** wird zunächst die Gleichwertigkeit von Anteilen in der Streifentafel kurz wiederholt und es werden Vorstellungsübungen zur Ablösung vom Material angeboten, um die Beobachtungen beim Verfeinern und Vergröbern, die in den Streifen gemacht wurden, in die Rechenregel zu übertragen. Dabei muss stets über die Verfeinerungsstrukturen gesprochen werden („ich teile das Ganze in dreimal so viele Felder ein, also sind auch dreimal so viele markiert“).

In **Fördereinheit 2 (Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden)** wird die Rechenregel systematisch mit den Streifen verknüpft. Auch später wird die Rechenregel immer rückführbar auf das anschauliche Umwandeln durch feiner/gröber Einteilen.

Den Abschluss bilden Übungen zur Systematisierung und zum Flexibilisieren: So wird etwa die Multiplikation vom Erweitern abgegrenzt. Darüber hinaus können in den letzten Aufgaben Zahlbeziehungen untersucht werden, die aber in voller Flexibilität nicht mehr das Ziel für alle Lernenden darstellen.

Digitale Medien zum Baustein

Alle digitalen Medien werden kontinuierlich ausgebaut und sind stets aktuell verlinkt unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#b2

- Mit den **digitalen Bruchstreifen** lassen sich das feinere und gröbere Einteilen visualisieren. So wird der Vorstellungsaufbau unterstützt.
  https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html
- Mit den **Erklärvideos** lassen sich die erarbeiteten Inhalte mit den Kindern systematisieren.
  1) Gleichwertige Anteile durch Erweitern finden (B2B1): https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaer-videos?nid=695
  2) Gleichwertige Anteile durch Kürzen finden (B2B2): https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaer-videos?nid=696
- Im **didaktischen Themenfilm** für Lehrkräfte werden die aufgeführten Aspekte mit Fallbeispielen illustriert und aufgezeigt, worauf es bei der Förderung ankommt (nach Registrierung zugänglich).
  B2: mathe-sicher-koennen.dzlm.de/themenvideo/brueche3
- Die digitale Diagnose wird in zunehmend mehr Bundesländern im **MSK-Online-Check** möglich.

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Springer Spektrum.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. In: Praxis der Mathematik in der Schule 48 (11), 8 - 12

B2B Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

1 a) Bei Unklarheiten, was die Einteilung von Streifen mit den Brüchen zu tun haben soll, kann auf den abgebildeten Streifen verwiesen werden: Welche Anteile könnte man gut in diesem 4er-Streifen zeigen?

1 c) Manche Lernende sind irritiert, weil mehrere Brüche aufgeschrieben werden sollen. Hier hilft der Hinweis, dass gleich große Anteile geschrieben werden sollen, die nur anders heißen. Als Begründung können Lernende auch angeben, wie sie gerechnet haben.

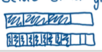
1 Gleichwertige Anteile im Kopf finden

a) Stelle dir $\frac{9}{12}$ und $\frac{3}{4}$ in Bruchstreifen vor.
Welcher Streifen hat eine feinere Einteilung, also mehr Felder?

$\frac{9}{12}$, weil beide Streifen gleich lang sind und er 12 Felder hat.

b) Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$?
Antworte und begründe.

Beide sind gleich groß, es wurde mit 3 vergröbert.



c) Finde zwei verschiedene Brüche, die genauso groß sind wie $\frac{12}{36}$.
Begründe.

$$\frac{12}{36} = \frac{24}{72} = \frac{6}{18}$$

Der 1. Bruch wurde mit 2 verfeinert, der 2. mit 2 vergröbert.

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

a) (1) Erweitere den Bruch mit 7. $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$

(2) Kürze den Bruch mit 6. $\frac{24}{36} = \frac{4}{6}$

b) Erweitere die Brüche.

(1) $\frac{7}{11} = \frac{63}{99}$ Es wurde mit 9 erweitert.

(2) $\frac{8}{12} = \frac{32}{48}$ Es wurde mit 4 erweitert.

c) Kürze die Brüche.

(1) $\frac{35}{120} = \frac{7}{24}$ Es wurde mit 5 gekürzt.

(2) $\frac{56}{63} = \frac{8}{9}$ Es wurde mit 7 gekürzt.

Hinweise zur Auswertung

Übergreifende Fehler

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
1)	Erweitern bedeutet Multiplizieren, Kürzen Dividieren. „$\frac{9}{12}$ weil $\frac{9}{12}$ das dreifache von $\frac{3}{4}$ ist."	Häufig werden nur Bezeichnungen verwechselt, teilweise ist aber auch Verständnis nicht tragfähig.	Multiplikation und Erweitern abgrenzen (2.3).
	z. B. „$\frac{3}{4}$ ist größer weil 3 von 4 ein kleinerer Abstand ist." $\frac{12}{36} = \frac{14}{38} = \frac{16}{40}$	Brüche werden über den Abstand zwischen den Zahlen in Zähler und Nenner verglichen.	Gleichmäßiges Verfeinern bzw. Vergröbern von Teil und Ganzem thematisieren (ggf. Wiederholung in **B2A** bzw. 1.1 -1.4). Bedeutung des Erweiterungsfaktors erarbeiten (2.1 - 2.4).
	z. B. $\frac{12}{36} = \frac{6}{72} = \frac{3}{108}$ Kürze die Brüche: (1) $\frac{35}{120} = \frac{7}{600}$ Es wurde mit 5 gekürzt.	Es wird z. B. im Zähler multipliziert und im Nenner dividiert. Mögliche Idee: Mal und geteilt heben sich auf.	
1), 2)	Einmaleins-Fehler	Beim Erweitern und Kürzen wird fehlerhaft meist in Zähler oder Nenner gerechnet.	Keine spezielle Förderung in **B2B** notwendig. Ggf. üben oder Weg zum Kürzen über Reihen thematisieren (2.2; 2.5 - 2.8).

Diagnoseaufgabe 1: Gleichwertige Anteile im Kopf finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
b)	z. B. Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$? Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ weil 12 ist größer als 4. Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ ist der größere Anteil weil mehr Felder gefärbt werden. Antwort und Begründung: $\frac{3}{4}$ weil ~~ge~~ ~~der Nenner~~ ~~jede 4.~~ je kleiner der Nenner desto größer ~~die Zahl~~ der bruch	Brüche werden nur über den Nenner bzw. nur über den Zähler verglichen. Die Bearbeitung in a) kann hier zum Teil bei der Einschätzung der Lösung helfen.	Gleichmäßiges Verfeinern bzw. Vergröbern von Teil und Ganzem erarbeiten (ggf. Wiederholung in **B2A** bzw. 1.1 - 1.4).
c)	z. B. $\frac{12}{36} = \frac{\boxed{8}}{\boxed{40}} = \frac{\boxed{13}}{\boxed{35}}$	Die Summe aus Zähler und Nenner wird erhalten.	

Diagnoseaufgabe 2: Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)	z. B. Erweitere die Brüche: (1) $\frac{7}{11} = \frac{63}{\boxed{67}}$ Es wurde mit 56 erweitert. mit 6 kürzen: $\frac{24}{36} = \frac{\boxed{18}}{\boxed{30}}$	Kürzen wird als Subtrahieren, Erweitern als Addieren in Zähler und / oder Nenner interpretiert.	Ggf. gleichmäßiges Verfeinern bzw. Vergröbern von Teil und Ganzem thematisieren (1.1 - 1.4). Bedeutung des Erweiterungsfaktors erarbeiten (2.1 - 2.4).
b), c)	z. B. **(2)** $\frac{56}{63} = \frac{\boxed{7}}{9}$ Es wurde mit 7 gekürzt.	Die Zahl, mit der gekürzt oder erweitert wurde, wird in den Zähler bzw. Nenner geschrieben.	Unter Umständen Flüchtigkeitsfehler, sonst siehe a).

B2B Wie können wir fördern, gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen zu finden?

1 Gleichwertige Anteile im Kopf finden

1.1 **Erarbeiten**

Ziel: Gleich große Brüche in der Streifentafel identifizieren; Vergröbern und Verfeinern erklären

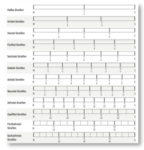
Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen mithilfe ihrer Erkenntnisse und den Begrifflichkeiten aus **B2A** erklären, was Verfeinern und Vergröbern bedeutet: Vergröbern bedeutet Blick nach oben in der Tafel mit gröberer Einteilung – Verfeinern nach unten mit feinerer Einteilung. Dabei werden gleich große Anteile durch gleich lange Teile gefunden.

Die digitalen Bruchstreifen:
Mit den digitalen Bruchstreifen wird erfahrbar, dass das Ganze und der Teil beim Verfeinern und Vergröbern gleichbleibt und lediglich die Einteilung feiner oder gröber wird.
https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

1.1 Die Streifentafel oder die digitalen Bruchstreifen nutzen



a) Markiere $\frac{8}{10}$ in der Streifentafel und suche gleich große Anteile:
- Welche Anteile sind gröber eingeteilt, aber gleich groß wie $\frac{8}{10}$?
- Welche Anteile sind feiner eingeteilt, aber gleich groß wie $\frac{8}{10}$?
- Was passiert beim Vergröbern und Verfeinern mit den Feldern im Streifen? Erkläre.

Wenn ich einen gleich groben Anteil suche, teile ich das Ganze in feinere Felder ein. Dann wird automatisch auch der Teil in entsprechend feinere Felder eingeteilt.
Obwohl es mehr Felder sind, bleibt der markierte Teil genauso lang wie vorher. Der Anteil ist deshalb gleichwertig.
Wenn ich einen gleich groben Anteil in einem gröber eingeteilten Streifen suche, fasse ich mehrere kleine Felder zu Gröberen zusammen. Das Ganze hat dann weniger und gröbere Felder, und auch der Teil besteht aus weniger und gröberen Feldern. Die Länge des markierten Teils bleibt aber gleich groß. Darum ist der neue Anteil wieder gleichwertig.

Lösung zu b):
Unmöglich, einen gröberen Anteil zu finden, wird hier phänomenologisch betrachtet (Einteilung passt nicht). Argumentation über Kürzbarkeit möglich, aber hier nicht erwartet.

b) Finde wie in **a)** gleich große Anteile zu $\frac{5}{6}$ und schreibe sie auf. Warum findest du für diesen Anteil keinen gröberen Streifen?

Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

1.2 Erarbeiten

Ziel: Verinnerlichen der Verfeinerung: Vorstellen des Streifens im Kopf als Grundlage für spätere Begründung der Rechenregel

Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b), c), d), e) jeweils UG, f) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Verfeinerungsstrukturen als mentale Vorstellung nutzen, um die Aufgaben zu lösen und anschließend erst mit den digitalen Bruchstreifen oder der Streifentafel überprüfen.
Die Aufgabe kann (mit anderen Zahlen) wiederholt z. B. als Einstieg genutzt werden, um inhaltliche Vorstellungen und das Verfahren des Erweiterns und Kürzens zu verknüpfen.

Impulse:

- Wie wurde ein Viertel-Feld verfeinert?
- Aus wie vielen Zwölftel-Feldern besteht ein Viertel-Feld?

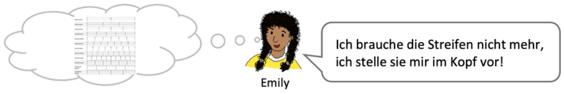
Methode zu a)/b):
Beispielaufgabe mit 1/6 als gemeinsame Vorstellungsübung moderieren und dann Einzelarbeit. Ggf. weitere operative Aufgaben vorbereitend zu e) ergänzen: 2/4, 3/4, 4/4 im Kopf.

Lösung zu b):
Im 12tel-Streifen sind 12 Zwölftel. 1/4 ist so groß wie 3 Zwölftel. 3/4 ist dann dreimal so viel.

Methode zu e):
Stärkere Lernende, die operativen Zusammenhang in c) erkannt haben, bearbeiten e) selektiv und in Partnerarbeit. Schwächere Lernende brauchen Explizierung des Nutzens von Einheiten: Jedes Fünftel wird im 15tel-Streifen zu 3 Fünfzehnteln.

1.2 Gleich große Anteile durch Verfeinern im Kopf finden

a)



Stelle dir den Bruch $\frac{1}{4}$ im Viertel-Streifen vor.

- Stelle dir jetzt den gleich langen Teil im feineren Zwölftel-Streifen vor: Wie viele Felder sind auf dem Zwölftel-Streifen markiert?
- Wie viele Zwölftel sind also genauso groß wie $\frac{1}{4}$?

Kontrolliere mit der Streifentafel oder den digitalen Bruchstreifen.

b) Stelle dir $\frac{3}{4}$ vor.

- Stelle dir den gleich langen Teil im feineren Zwölftel-Streifen vor: Wie viele Felder sind jetzt auf dem Zwölftel-Streifen markiert?
- Wie viele Zwölftel sind also genauso groß wie $\frac{3}{4}$?

Kontrolliere mit der Streifentafel oder den digitalen Bruchstreifen.

c) Vergleiche die Brüche aus **a)** und **b)** miteinander: Was bleibt gleich, was ändert sich?

Beide Anteile haben dasselbe Ganze und gleich große Teile (Viertel). Der Unterschied liegt nur darin, wie viele dieser gleich großen Teile zum Anteil gehören. 3/4 besteht aus drei Vierteln, 1/4 aus einem Viertel.
Der Anteil 3/4 ist also dreimal so groß wie 1/4.
Genau derselbe Zusammenhang bleibt nach dem Verfeinern erhalten.
Das Ganze bleibt nach dem Verfeinern gleich lang. Auch die Länge der markierten Teile bleibt jeweils gleich. Geändert hat sich die Einteilung. Im Zwölftel-Streifen ist das Ganze feiner eingeteilt als im Viertel-Streifen. Deshalb werden aus einem Viertel drei Zwölftel und aus drei Vierteln neun Zwölftel.

d) Stelle dir für $\frac{2}{3}$ den gleich großen Anteil in Zwölfteln vor.
Kontrolliere mit der Streifentafel oder den digitalen Bruchstreifen.

e) Stelle dir für $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ jeweils den gleich großen Anteil im Zehntel- und im Fünfzehntel-Streifen vor. Was stellst du fest? Kontrolliere.

f) Eine Person sagt einen Anteil.
Die andere nennt einen dazu passenden feineren Streifen und einen gleich großen Anteil.
Erklärt euch dabei gegenseitig, wie ihr den passenden Streifen und Anteil gefunden habt.
Kontrolliert mit Streifentafel oder digitalen Bruchstreifen.

1.3 **Erarbeiten**

Ziel: Verinnerlichung des gröberen Einteilens: Mentales Vorstellen des Streifens im Kopf als Grundlage für spätere Begründung der Rechenregel

Material: -

Umsetzung: a), b) jeweils UG, c) EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen ihre mentalen Vorstellungen zum Vergröbern aktivieren und erklären, warum Anteile gleichwertig sind. Das Vergröbern fällt häufig schwerer, da Einheiten zusammengefasst / aufgelöst werden müssen und von größeren zu kleineren Zahlen übergegangen wird (hier: 9 zu 3). Das Bild hilft, die Vorstellung zu unterstützen und materialungestützte Verinnerlichung in c) (3) anzubahnen. Überprüfung kann auch zusätzlich über vertrautes Verfeinern erfolgen.

Impulse:
- Warum sind die Anteile in beiden Streifen gleichwertig? (Weil das Ganze gleich groß ist und der markierte Teil gleich lang).
- Was unterscheidet den gröberen von dem feineren Streifen? Womit wurde vergröbert?

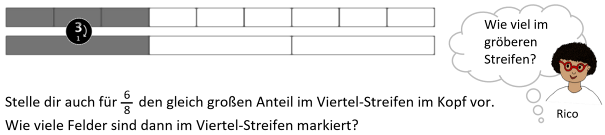
Lösung zu a):
Man findet so einen gleichwertigen Anteil, weil man Felder zusammenfasst zu neuen Feldern. Der markierte Teil bleibt dabei immer gleich lang.

Methode zu b):
Wie 1.2 als Vorstellungsübung moderieren mit Schritt über den Stammbruch 1/8. Ggf. Zwischenschritte mit den digitalen Bruchstreifen kontrollieren und weitere einfache Aufgaben ergänzen (z. B. 8/12 im 6tel-Streifen).

Methode zu c):
Das Zusammenfassen der Felder zu neuen Feldern (16 16tel zu 4 Vierteln, etc.) sollte besprochen werden. (3) löst die Vorstellung von der Tafel vollständig ab, ggf. kann mit selbst gezeichneten Streifen überprüft werden.

1.3 Gleich große Anteile durch Vergröbern im Kopf finden

a) Gleich große Anteile findet man, wenn man einen Bruchstreifen sucht, der gröber eingeteilt ist.
Erkläre, wie und warum man so einen gleichwertigen Anteil finden kann.



b) Stelle dir auch für $\frac{6}{8}$ den gleich großen Anteil im Viertel-Streifen im Kopf vor.
Wie viele Felder sind dann im Viertel-Streifen markiert?

c) Stelle dir die Anteile wieder zunächst im Kopf vor und erkläre dann:

(1) Warum ist $\frac{12}{16}$ so groß wie $\frac{3}{4}$? Ist $\frac{18}{24}$ auch so groß wie $\frac{3}{4}$?

(2) Warum ist $\frac{16}{20}$ so groß wie $\frac{8}{10}$? Ist $\frac{16}{20}$ auch so groß wie $\frac{4}{5}$?

(3) 64-tel kann man nicht mehr in der Streifentafel sehen. Sind $\frac{48}{64}$ so groß wie $\frac{12}{16}$?

(1)
Die Brüche 3/4, 12/16 und 18/24 sind gleichwertig, weil sie denselben Anteil beschreiben. Von 3/4 zu 12/16 wird feiner eingeteilt. Aus 4 Feldern im Ganzen werden 16 Felder, also viermal so viele. Dann werden auch aus 3 Feldern im Teil viermal so viele, nämlich 12. Teil und Ganzes werden gleichmäßig feiner eingeteilt, deshalb bleibt der Anteil gleich groß.
Von 3/4 zu 18/24 wird noch feiner eingeteilt. Aus 4 Feldern werden 24 Felder, also sechsmal so viele. Dann werden auch aus 3 Feldern sechsmal so viele, nämlich 18.

(2)
8/10 ist zweimal gröber eingeteilt als 16/20. Jeweils zwei 20tel-Felder werden zu einem 10tel-Feld zusammengefasst. Dadurch halbiert sich auch die Anzahl des markierten Teils.
4/5 ist noch gröber eingeteilt. Jeweils 4 Felder werden zu einem gröberen zusammengefasst, also werden Zähler und Nenner durch 4 dividiert.

(3)
12/16 ist viermal gröber eingeteilt als 48/64. Jeweils vier 64tel-Felder werden zu einem 16tel-Feld zusammengefasst. Dadurch wird auch die Anzahl der markierten Felder durch 4 geteilt: Aus 48 markierten Feldern werden 12.

1.4 **Üben**

Ziel: Verfeinern und Vergröbern im Kopf üben

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann PA, b) EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Anteile mental verfeinern und vergröbern. Dazu nutzen sie ihre Vorstellungen zu Anteilen in Bruchstreifen. In dieser Aufgabe ist auch der Streifen gesucht, in dem verfeinert werden muss.

Impulse:

- Aus 4 Feldern werden 12 Felder. Wie wurden diese 4 Felder verfeinert?
- Was muss dann mit den 8 Feldern vom Streifen gemacht werden?
- Wie muss das Ganze verfeinert/vergröbert werden?

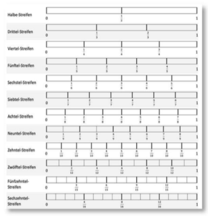
Denksprache:

- Aus … Feldern, werden … Felder, weil mit … verfeinert/vergröbert wird.

1.4 Einteilungen verfeinern und vergröbern im Kopf

a) Ergänze erst ohne Streifentafel so, dass die Anteile gleich groß sind. Schreibe sie dann als Brüche. Überprüfe am Ende an der Streifentafel.

- 4 von 8 Feldern im Streifen entspricht 12 von __24__ Feldern im Streifen.
  In Bruchschreibweise: $\frac{4}{8} = \frac{12}{24}$
- 6 von 24 entspricht __2__ von 8 Feldern im Streifen.
  In Bruchschreibweise: $\frac{6}{24} = \frac{2}{8}$
- Was fällt dir auf?



(Größere Streifentafel im Zusatzmaterial)

b) Löse wie in **a)**: __3__ von 15 entspricht 1 von __5__ Feldern im Streifen.
Erkläre, wie du vorgegangen bist. Findest du mehrere Lösungen?

4 von 8 entspricht 12 von 24 Feldern, denn wenn sich die Zahl der markierten Felder verdreifacht, dann auch die Zahl aller Felder
6 von 24 entspricht 2 von 8. Hier werden also immer 3er-Gruppen gebildet.

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

2.1 Erarbeiten

Ziel: Rechenregel des Erweiterns mit der Vorstellung vom Verfeinern verknüpfen

Material: -

Umsetzung: UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Rechenregel zum Erweitern mithilfe der Verfeinerung in den digitalen Bruchstreifen erarbeiten. So wird die Rechenregel mit der Nutzung der Verfeinerungsstruktur verknüpft und beugt der stupiden Anwendung der Regel vor.
Beim Verfeinern werden Teil und Ganzes jeweils feiner eingeteilt, aber nicht in der Größe verändert: Aus 1/3 werden 7/21. Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit derselben Zahl – hier 7 – multipliziert. Die 7 aus der Rechnung sieht man im Bild in der Art der Einteilung: Mit 7 erweitern bedeutet, jedes Drittel in 7 Felder teilen, d. h. es werden insgesamt jeweils 7mal so viele Felder für den Zähler bzw. für den Nenner. Das Ganze bleibt gleich groß.

Impulse:
- Wie musst du den Teil verfeinern, damit aus 2 Feldern 8 Felder werden?
- Wie musst du das Ganze verfeinern, damit aus 5 Feldern 20 Felder werden?
- Warum sind die beiden Anteile gleichwertig?

Erklärvideo:
Das Erklärvideo „Gleichwertige Anteile durch Erweitern finden“ dient zur Vertiefung oder Sicherung und Systematisierung des bereits Gelernten und greift die wichtigsten Aspekte auf, die zum Verstehen des Erweiterns zentral sind.
https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=695

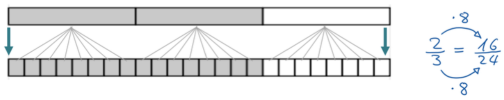
2.1 Rechenregel zum Erweitern von Brüchen im Bild verstehen

a) Emily hat zu $\frac{2}{5}$ den gleichwertigen Bruch $\frac{8}{20}$ gefunden. Wie hat Emily verfeinert?
Schreibe die passenden Zahlen an die Pfeile.

Die digitalen Bruchstreifen können dir dabei helfen:
Verfeinere $\frac{2}{5}$, sodass die Bruchstreifen zur Rechnung passen.

Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

b) Emilys Rechnung nennt man Erweitern. Sie erweitert nun auch den Bruch $\frac{2}{3}$.



Was hat die Rechnung mit dem Bild zu tun?
- Was passiert beim Verfeinern im Bild mit Teil und Ganzem?
- Was passiert beim Erweitern in Emilys Rechnung mit Zähler und Nenner?
- Wo sieht man die 5 im Bild?

Schreibe deine Beobachtungen auf:

Beim Erweitern werden Teil und Ganzes jeweils in 5 mal so viele kleine Felder eingeteilt.
Die Größe von Teil und Ganzem bleibt gleich, nur die Anzahl der Felder wird verfünffacht.
In Emilys Rechnung wird Zähler und Nenner mit 5 multipliziert: aus $\frac{2}{3}$ wird $\frac{10}{15}$. Im Bild sieht man 5 daran, dass jedes Feld in 5 kleine Felder geteilt.
So bleiben die Anteile gleichwertig, die Einteilung wird nur feiner.

Mögliche Satzbausteine
- Teil und Ganzes werden jeweils …
- Die Größe von Teil und Ganzes …
- … wird in … Felder eingeteilt.
- Aus den … Felden … mal so viele kleine Felder.
- … mit … multiplizieren.
- Die Anzahl der Felder wird ver … facht.

B2B1

c) Vergleiche deine Erklärung mit dem Erklärvideo:
- Was wird genauso erklärt, wie du es gemacht hast?
- Was ist anders? Was wird zusätzlich erklärt?

mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=695

2.2 Üben

Ziel: Erweitern bzw. Verfeinern üben

Material: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann PA, dann UG, b) UG, c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund:
Die Lernenden sollen das Erweitern üben und dabei mit dem Verfeinern der Felder argumentieren. Es gibt Aufgaben, die ohne Zwischenschritt zu demselben Ergebnis führen. Die Zahl zum direkten Erweitern ergibt sich als Produkt aus den Erweiterungsfaktoren der Zwischenschritte.
Wenn die Zahlen nicht in der Streifentafel darstellbar sind, muss entweder mit eigenen Bildern oder über das feinere Einteilen von Feldern argumentiert werden.

Impulse:

- Wie erkennst du, dass mit x erweitert/gekürzt wurde?
- Wie sieht dazu dein Bild der Bruchstreifen im Kopf aus? (→ 1 Feld wurde verfeinert zu .... Also wird mit ... verfeinert. Da jedes Feld mit ... verfeinert wird, wird das Ganze verfeinert mit ...)

2.2 Zahlen zum Erweitern finden

a) Wie wurde hier erweitert oder verfeinert?

$\frac{1}{2} \overset{\cdot 3}{=} \frac{3}{6} \overset{\cdot 2}{=} \frac{6}{12}$ $\frac{4}{5} \overset{\cdot 5}{=} \frac{20}{25}$ $\frac{1}{3} \overset{\cdot 3}{=} \frac{3}{9} \overset{\cdot 4}{=} \frac{12}{36}$ $\frac{3}{9} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{27}$

$\frac{1}{2} \overset{\cdot 6}{=} \frac{6}{12}$ $\frac{1}{3} \overset{\cdot 12}{=} \frac{12}{36}$ $\frac{2}{3} \overset{\cdot 7}{=} \frac{14}{21} \overset{\cdot 2}{=} \frac{28}{42}$ $\frac{2}{3} \overset{\cdot 14}{=} \frac{28}{24}$

b) Welche Aufgaben passen zusammen? Was fällt dir auf? Erkläre an den Bruchstreifen.

Wenn ich zweimal hintereinander feiner einteile, zum Beispiel erst dreimal so fein und dann noch einmal zweimal so fein, dann ist das genauso, als würde ich direkt 6 mal feiner einteilen. Ich teile jedes Feld erst in 3 kleinere Felder und dann jedes dieser Felder noch einmal in 2 kleinere Felder. Insgesamt habe ich dann 6 kleinere Felder pro vorherigem Feld. Das ist dieselbe Einteilung wie beim direkten feiner Einteilen mit 6.

c) Schreibt euch jeweils zwei gleichwertige Brüche auf und findet heraus, mit welcher Zahl erweitert wurde. Erklärt euch gegenseitig die Erweiterung an Streifen.

2.3 Erarbeiten

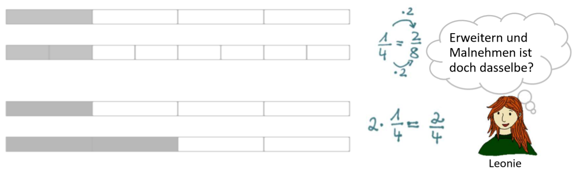
Ziel: Erweitern und Multiplizieren voneinander abgrenzen

Material: -

Umsetzung: UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen den Unterschied zwischen der Multiplikation und dem Erweitern erarbeiten. Manche Lernende verwechseln Multiplizieren und Erweitern, weil bei beiden Operationen multipliziert wird. Beim Erweitern wird die Einteilung vom Streifen verändert, nicht aber der gefärbte Teil. Beim Multiplizieren wird der Teil größer.

2.3 Erweitern und Multiplizieren



a) Vergleiche die Bilder und Rechnungen.
Erkläre Leonie, warum Erweitern und Malnehmen nicht dasselbe ist.

b) Schreibe eine Erklärung auf.

Erweitern und Malnehmen ist nicht dasselbe, weil beim Erweitern der Anteil gleich lang bleiben und nur feiner eingeteilt werden. Beim Malnehmen wird der Anteil wirklich größer oder kleiner, die Teile sind unterschiedlich lang.

Mögliche Satzbausteine

- ... ist nicht dasselbe, weil ...
- Die Einteilung der Streifen ...
- Beim Erweitern ...
- ... unterschiedlich lang, weil ...
- Beim Malnehmen ...
- ... gleich lang, weil ...

2.4 **Üben**

Ziel: Erweitern üben, typische Fehlvorstellung widerlegen

Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, b) UG

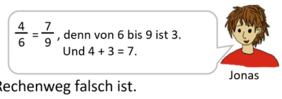
Hintergrund:
Die Lernenden sollen das Erweitern üben und anhand von Jonas Fehler ihre Vorstellungen zum Verfeinern vertiefen und reflektieren. Bei den ersten beiden Aufgaben und den beiden anderen Brüchen in a) entstehen jeweils gleiche Nenner (man landet in demselben Streifen), obwohl unterschiedlich verfeinert wurde.
Manche Lernende vergleichen Anteile, indem sie auf die Anzahl der Felder in einem Bruchstreifen schauen: Wenn zwischen der Zahl im Zähler und der im Nenner derselbe Abstand liegt, schätzen sie die Anteile als gleich groß ein.

2.4 Erweitern

a) Erweitere die Brüche.

$\frac{8}{11} \overset{\cdot 8}{=} \frac{64}{88}$ $\frac{5}{8} \overset{\cdot 11}{=} \frac{55}{88}$ $\frac{3}{7} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{21}$ $\frac{2}{3} \overset{\cdot 7}{=} \frac{14}{21}$

b) Jonas hat einen gleichwertigen Bruch zu $\frac{4}{6}$ mit dem Nenner 9 gesucht.



Erkläre mit den Bruchstreifen, warum Jonas' Rechenweg falsch ist.
Wie muss Jonas richtig verfeinern?

Die Anteile 4/6 und 7/9 sind nicht gleichwertig, weil der markierte Teil nicht gleichlang ist.

Man müsste in 18 Felder feiner einteilen (kleinstes gemeinsames Vielfaches von 6 und 9) und erkennt dann, dass 6/9 gleichwertig zu 4/6 ist.

$\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$ und $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$

2.5 **Erarbeiten**

Ziel: Rechenregel des Kürzens mit der Vorstellung vom Vergröbern zusammenbringen

Umsetzung: a) UG; b) EA, dann PA

Hintergrund: Die Lernenden sollen die Rechenregel zum Kürzen an das gröbere Einteilen gezielt anknüpfen, indem sie die Passung der Rechnung mit dem Bild der Bruchstreifen untersuchen und erklären. So wird die Rechenregel mit der Nutzung der Strukturen verknüpft, um ihrer unverstandenen Anwendung vorzubeugen.
Beim Vergröbern werden Teil und Ganzes jeweils gröber eingeteilt, aber nicht in der Größe verändert: Das alte Ganze ist in 24 Felder eingeteilt. Das Ganze wird gröber eingeteilt: Die 24 Felder werden in 8er Gruppen zusammengefasst und es entstehen 3 gröbere Felder. Also hat das neue Ganze 24 : 8 = 3 Drittel. Das neue Ganze bleibt gleich groß und der markierte Teil bleibt gleich lang. Das bedeutet, dass auch der Teil, die markierten 16 Felder des 24tel-Bruchstreifens, in 8er Gruppen zusammengefasst werden. Wenn ich 16 mit 8 dividiere, erhalte ich 2. Dann habe ich 2 markierte Drittel-Felder. So erhalte ich den zu 16/24 gleichwertigen Anteil 2/3.

Impulse:

- Wie musst du den Teil verändern, damit aus 16 Feldern 2 Felder werden?
- Wie musst du das Ganze gröber einteilen, damit aus 24 Feldern 3 Felder werden?
- Warum sind die beiden Anteile gleichwertig?

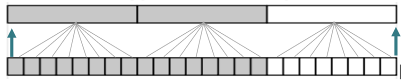
Erklärvideo: Dient zur Vertiefung oder Sicherung und Systematisierung des bereits Gelernten und greift die wichtigsten Aspekte auf, die zum Verstehen des Kürzens zentral sind.
https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=696

2.5 Felder zusammenfassen und gröber einteilen

Digitale Bruchstreifen
dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html

a) Emily hat zu $\frac{3}{12}$ den gleichwertigen Bruch $\frac{1}{4}$ gefunden.
Wie hat Emily vergröbert? Erkläre am digitalen Bruchstreifen.

b) Emily hat einen gleichwertigen Bruch zu $\frac{16}{24}$ mit Bruchstreifen und durch eine Rechnung gefunden. Die Rechnung nennt man *Kürzen*.



$$\frac{16}{24} \overset{:8}{=} \frac{2}{3}$$

Was hat die Rechnung mit dem Bild zu tun?

- Was passiert beim Vergröbern im Bild mit Teil und Ganzem?
- Was passiert beim Kürzen in Emilys Rechnung mit Zähler und Nenner?
- Wo sieht man die 8 im Bild?

Schreibe deine Beobachtungen auf.

Mögliche Satzbausteine
- Teil und Ganzes werden jeweils …
- Die Größe von Teil und Ganzes …
- … mit … dividieren
- … Felder werden zu einem Feld zusammengefasst

Beim Kürzen werden Teil und Ganzes jeweils mit 8 dividiert. Im Bild werden immer 8 Felder zu einem Feld zusammengefasst. Die Größe von Teil und Ganzem bleibt gleich, nur die Anzahl der Felder wird weniger. Die 8 sieht man daran, dass immer 8 kleine Felder ein großes ergeben.

b)
- Wie kann man $\frac{6}{15}$ in Fünftel umwandeln? Ergänze die Rechnung.
- Zeichne zu der Rechnung ein Bild oder zeige sie in der Streifentafel.
- Wie kann man $\frac{12}{36}$ in Drittel umwandeln?

$$\frac{6}{15} \overset{:3}{=} \frac{\boxed{2}}{5}$$

Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

- In der Streifentafel teilt man die 15 Felder in 5 größere Felder, je 3 kleine Felder werden zusammengefasst.
- $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, weil 12 : 12 = 1 und 36 : 12 = 3.
Ich habe überlegt, durch welche Zahl ich Zähler und Nenner teilen kann, damit im Nenner 3 steht.

B2B2

c) Vergleiche deine Erkärung mit dem Erklärvideo.
- Was wird genauso erklärt, wie du es gemacht hast?
- Was ist anders? Was wird zusätzlich erklärt?

mathe-sicher-koennen.dzlm.de/erklaervideos?nid=696

2.6 **Üben**

Ziel: Erweitern und Kürzen üben und systematisieren

Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: 2.6 a), b) jeweils EA, dann PA; 2.6 c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund: Die Lernenden sollen das Erweitern und Kürzen üben und Zusammenhänge erklären.
Wichtig ist es, zu thematisieren, warum oben und unten nicht unterschiedliche Erweiterungsfaktoren vorkommen können (→ Weil Teil und Ganzes gleich / in demselben Streifen verfeinert werden). Beim Kürzen muss Teilbarkeit beachtet werden.

Lösung zu a) und b):
Vom ersten bis zum letzten Bruch kommt man in einem Schritt, wenn man mit dem Produkt aus den einzelnen Faktoren erweitert bzw. kürzt.

2.6 Erweitern und Kürzen üben

a) Erweitere oder kürze. Gib die Zahl an, mit der du gekürzt oder erweitert hast.

$$\frac{18}{27} \overset{:3}{=} \frac{6}{9} \overset{:3}{=} \frac{\boxed{2}}{3} \qquad \frac{60}{80} \overset{:4}{=} \frac{15}{\boxed{20}} \overset{:5}{=} \frac{3}{\boxed{4}} \qquad \frac{28}{\boxed{56}} \overset{:4}{=} \frac{7}{14} \overset{:7}{=} \frac{\boxed{1}}{2}$$

b)

$$\frac{3}{7} \overset{\cdot 3}{=} \frac{\boxed{9}}{21} \overset{\cdot 3}{=} \frac{\boxed{27}}{63} \qquad \frac{12}{25} \overset{\cdot 4}{=} \frac{48}{\boxed{100}} \overset{\cdot 3}{=} \frac{144}{\boxed{300}} \qquad \frac{9}{\boxed{11}} \overset{\cdot 7}{=} \frac{63}{77} \overset{\cdot 2}{=} \frac{\boxed{126}}{154}$$

c) Eine Person nennt einen Bruch und eine Zahl, mit der Zähler und Nenner erweitert oder gekürzt werden sollen, die andere löst die Aufgabe. Wechselt euch ab.
Bei jeder 5. Aufgabe zeichnet einen Streifen, um zu erklären, was die Rechnung bedeutet.

2.7 **Erarbeiten**

Ziel: Zahlen zum Kürzen über Reihen finden, Kürzen üben

Material: -

Umsetzung: EA, dann PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Zahlen zum Kürzen über Reihen finden. Zahlen, mit denen man kürzen kann, müssen Zähler und Nenner teilen. Hier wird das in Form von Reihen überlegt: Wenn Zähler und Nenner gleichzeitig in einer Reihe vorkommen, sind sie Vielfache von der Ausgangszahl der Reihe, d. h. man kann mit dieser Zahl kürzen. Dabei kann man mit der ersten gefundenen Reihe starten (hier 7). Manchmal gibt es weitere Reihen, bei denen beim Kürzen die Zahlen in Nenner und Zähler noch kleiner und der Bruch überschaubarer wird. Die *optimale* Zahl zum Kürzen zu finden, wird hier jedoch nicht angestrebt. Weitere Möglichkeit: Mit dem gekürzten Bruch weiter machen (Hier aber auch nicht Ziel für alle Lernenden).

Lösung zu c):
(1) Zähler / Nenner Vielfache von 4.
(2) Vielfache von 12.
(3) teilbar durch 4, 12, 20, ... aber nicht Vielfache von 8.

2.7 Zahlen zum Kürzen finden

a) Leonie und Kenan wollen $\frac{21}{56}$ kürzen. Sie überlegen, wie man Zahlen zum Kürzen findet.

Ich suche nach einer Zahl, in deren Reihe der Zähler und der Nenner vorkommen. Mit dieser Zahl kann ich kürzen, denn sie teilt Zähler und Nenner.

Ich suche nach einer Zahl, durch die ich Zähler und Nenner teilen kann. Dann teile ich so oft, bis ich keine Zahl mehr zum Teilen

3er-Reihe	3	6	9	12	15	18	**21**	...	54	57
5er-Reihe	5	10	15	20	25	...				
6er-Reihe	6	12	18	24	...					
7er-Reihe	7	14	**21**	28	35	42	49	**5,**	...	

Durch welche Zahlen kann Leonie kürzen? Schreibe den gekürzten Bruch auf.

b) Kürze die Brüche wie Leonie, Kenan oder ganz anders: $\frac{28}{70}$, $\frac{12}{40}$, $\frac{42}{126}$, $\frac{15}{30}$
Vergleicht, wie ihr die Zahlen zum Kürzen gefunden habt.

c)* Zum Experimentieren:
- Gib drei Brüche an, die man mit 4 kürzen kann.
- Gib drei Brüche an, die man mit 4 und 3 kürzen kann.
- Gib drei Brüche an, die man mit 4, aber nicht mit 8 kürzen kann.

d)* Welche Zahlen können in den Kästchen stehen? Suche möglichst viele Lösungen.

(1) $\frac{\boxed{5}}{3} = \frac{20}{\boxed{12}}$ (2) $\frac{4}{\boxed{5}} = \frac{20}{\boxed{25}}$ (3) $\frac{\boxed{30}}{36} = \frac{45}{\boxed{18}}$

B2C Brüche und Prozente ineinander umwandeln – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Brüche und Prozente sollten im Rahmen eines Bruchecurriculums nicht isoliert gelernt, sondern vielmehr als zwei Schreibweisen für Anteile verstanden werden.

Brüche in Prozente als Hundertstel-Brüche erweitern

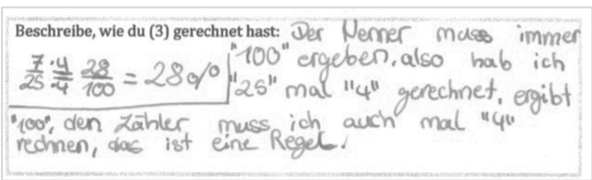
Dieser Förderbaustein knüpft an die in Baustein **B1B** eingeführte *Hundertstel-Bruch-Vorstellung* von Prozenten sowie an die in den Bausteinen **B2A** und **B2B** erarbeitete Vorstellung der Gleichwertigkeit von Brüchen an. Dabei wird das Umwandeln von Brüchen in Prozente ineinander, das in Baustein **B1B** auf einer rein anschaulichen Ebene eingeführt wurde, hier systematischer gefasst und auf kompliziertere Brüche ausgeweitet: Anteile und Prozente werden nicht mehr ausschließlich durch das direkte Vergleichen im Bruchstreifen ineinander überführt, sondern – wie in den Bausteinen **B2A** und **B2B** für Anteile in Bruchschreibweise bereits erarbeitet – nun zunehmend durch Erweitern und Kürzen ineinander umgewandelt. Dabei kommen neben den bisher ausschließlich betrachteten Nennern 100 und 10 auch andere Nenner vor, die Teiler von 100 sind. Das Erweitern der Brüche auf den Nenner 100 bereitet auch schon das in Baustein **B3A** zu erarbeitende Gleichnamigmachen vor. Brüche, deren Nenner keine Teiler von 100 sind, die sich jedoch über den Umweg über das Kürzen dennoch in einen Hundertstelbruch umformen lassen, werden nur ausblickartig thematisiert.

Die Motivation für diese Einheit, also die Tatsache, dass Prozente nur andere Schreibweisen für Brüche und dazu noch besonders leicht vergleichbar sind, wird in Baustein **B3B** (Ordnen) aufgegriffen.

Hürden beim Umwandeln von Brüchen und Prozenten

Da der Baustein selbst auf verschiedene Konzepte der Bruchrechnung – Anteilsvorstellung, Erweitern, Kürzen – zurückgreift, zeigen sich hier oft komplexere Schwierigkeiten von Lernenden. Wichtig sind daher eine sorgfältige Diagnose der Ausgangsvoraussetzungen der Lernenden und eine anschauliche Erarbeitung / Weiternutzung der Gleichwertigkeit. Damit soll verhindert werden, dass Lernende auswendig gelernte, aber ggf. nicht inhaltlich durchdrungene Rechenregeln nutzen, wie in diesem Beispiel angedeutet:

Lernendendokument zum Umwandeln von Brüchen in Prozente



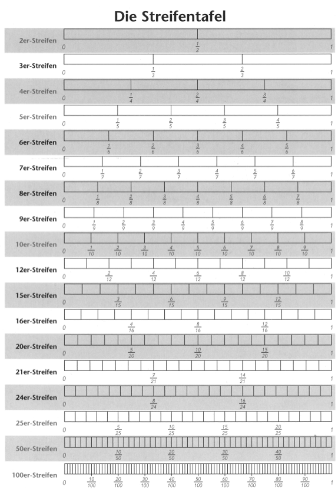
Dabei ist ein gefestigter Anteilsbegriff eine notwendige Voraussetzung, die in verschiedenen Repräsentationen abgerufen und mit der Prozentvorstellung verknüpft wird.

Veranschaulichung und Material

Streifentafel

Die Streifentafel, deren Struktur in Baustein **B2A** bereits erarbeitet und beschrieben wurde, wird in dieser Einheit genutzt, um Prozente als Brüche mit Nenner 100 zunächst zu lokalisieren, schließlich über das Ausnutzen der Gleichwertigkeit in andere Bruchschreibweisen zu überführen und der Rechenregel einen inhaltlichen Anker zu geben. Der Fokus liegt damit, anders als in Baustein **B2A**, auf dem jeweils gleichwertigen Anteil im letzten Streifen – dem 100tel-Streifen. Dieser ermöglicht eine direkte Umwandlung in Prozente.

Die Streifentafel



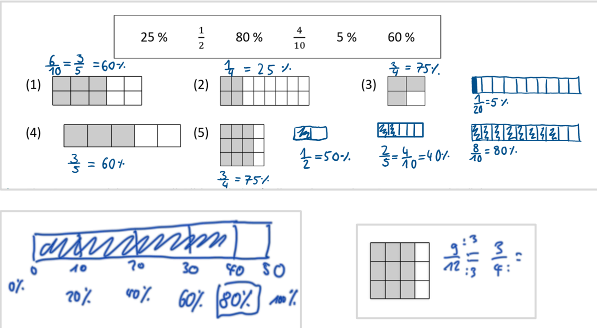
Besonders relevant sind die mit grauer Beschriftung versehenen Streifen der Tafel: Diese stellen die Teiler von 100 dar; jeder Anteil, der sich in diesen Streifen darstellen lässt, kann auch als Hundertstelbruch und damit auch als Prozent mit ganzzahliger Prozentzahl geschrieben werden.

Flächige Anschauungsmittel

Neben der linearen Darstellung von Prozenten in Bruchstreifen werden zur Flexibilisierung der Vorstellungen und zur Verknüpfung mit der Anteilsvorstellung auch flächige Anschauungsmittel eingesetzt.

Die Schwierigkeit besteht dabei für Lernende z.T. darin, dass sie das anders strukturierte Ganze mit der 100 im Nenner des Hundertstelbruchs verknüpfen müssen: „Was haben die 4 von 16 Kästchen mit Prozenten zu tun?“ Hier müssen die Konzepte des Verfeinerns und des Vergröberns, die an den Streifen erarbeitet wurden, ggf. noch einmal thematisiert werden.

Aufgabe 2.3: Lernendendokumente zum Umwandeln von Brüchen in Prozente mithilfe von flächigen Anschauungsmitteln



Aufbau der Förderung

Die Förderung gliedert sich in zwei Teile. In **Fördereinheit 1 (Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln)** wird das Erweitern von Brüchen auf den Nenner 100 als notwendiger Schritt beim Umwandeln von Brüchen in Prozente an der Streifentafel inhaltlich erarbeitet. Die Strukturierung, die beim bildlichen Bestimmen des Anteils im 100tel-Streifen genutzt wird, wird im Anschluss auf die Rechenregel übertragen und gibt diesem damit – analog zu Baustein **B2A** bzw. **B2B** – Sinn. Der Ausblick auf Brüche, deren Nenner keine Teiler von 100 sind, die aber dennoch durch vorheriges Kürzen auf 100 erweiterbar sind (z. B. 2/8 = 1/4 = 25/100), dient ebenfalls dazu, den Blick von der Tafel zu erweitern und das erneut in einem weiteren Problemfeld anzusprechen.

Fördereinheit 2 (Brüche und Prozente umwandeln) vollzieht den bereits inhaltlich in Baustein **B1B** für einfache Nenner vollzogenen Schritt vom Bruch mit Nenner 100 zur Prozentzahl. Hier wird nach einer Erarbeitung dieses Zusammenhangs operativ in verschiedenen Darstellungen und in beide Richtungen des Umwandelns geübt. Dabei wird auch die Gleichwertigkeit noch einmal in einer etwas anderen Perspektive aufgegriffen, indem thematisiert wird, dass verschiedene Brüche zu derselben Prozentzahl gehören können.

Zum Abschluss wird das Verinnerlichen zentraler Prozentzahlen und ihrer Repräsentationen im Rahmen eines „Paare finden“-Spiels in grafischer und verbaler Form angeregt.

Digitale Medien zum Baustein

Alle digitalen Medien werden kontinuierlich ausgebaut und sind stets aktuell verlinkt unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/bpd#b2

- Mit den folgende **digitalen Arbeitsmitteln** lassen sich die Inhalte visualisieren. So wird der Vorstellungsaufbau unterstützt: **Digitale Bruchstreifen:** https://dzlm.de/vam/msk-bruchstreifen.html
- Die digitale Streifentafel ist weniger interaktiv, aber genau passend zu dem Papier-Material, mit dem die Lernenden arbeiten: https://vam.dzlm.de/vams/apps/Bruchstreifentafel.html
- Die digitale Diagnose wird in zunehmend mehr Bundesländern im **MSK-Online-Check** möglich.

Weiterführende Literatur

Baireuther, P. (1983). Die Grundvorstellungen der Prozentrechnung. In: Mathematische Unterrichtspraxis 4(2), 25 - 34.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Springer Spektrum.

B2C Was können wir diagnostizieren?

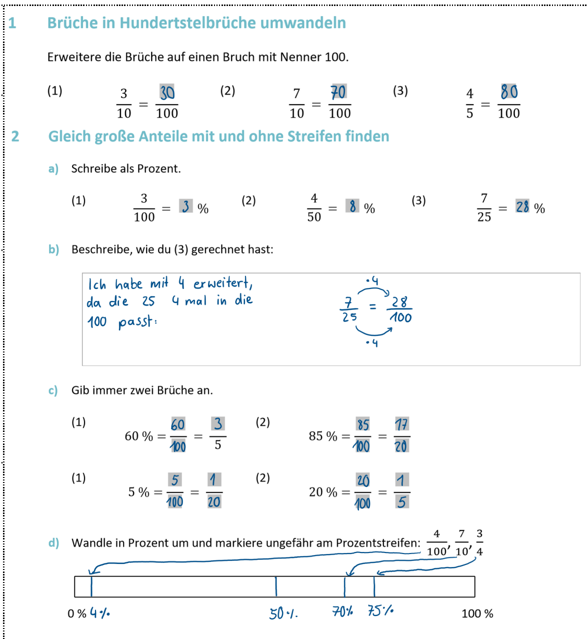
Dauer: 20 - 30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Lernende dazu auffordern, ihren Lösungsweg in 2 b) wirklich verbal aufzuschreiben.

2 c) Darauf hinweisen, dass jeweils zwei verschiedene Brüche gefunden werden sollen. Hier hilft der Hinweis, dass diese gleich groß sein sollen.
2 c) (4) muss nicht zwingend der vollständig gekürzte Bruch 1/5 gefunden werden.

Bei 2 d) kommt es nicht auf exaktes Zeichnen an.



1 Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln

Erweitere die Brüche auf einen Bruch mit Nenner 100.

(1) $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ (2) $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ (3) $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$

2 Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

a) Schreibe als Prozent.

(1) $\frac{3}{100} = 3\ \%$ (2) $\frac{4}{50} = 8\ \%$ (3) $\frac{7}{25} = 28\ \%$

b) Beschreibe, wie du (3) gerechnet hast:

Ich habe mit 4 erweitert, da die 25 4 mal in die 100 passt. $\frac{7}{25} \overset{\cdot 4}{=} \frac{28}{100}$

c) Gib immer zwei Brüche an.

(1) $60\ \% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ (2) $85\ \% = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$

(1) $5\ \% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ (2) $20\ \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

d) Wandle in Prozent um und markiere ungefähr am Prozentstreifen: $\frac{4}{100}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}$

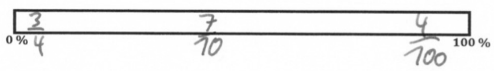
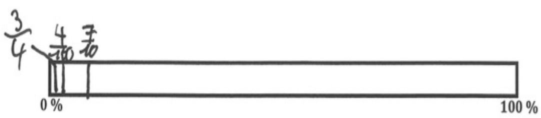
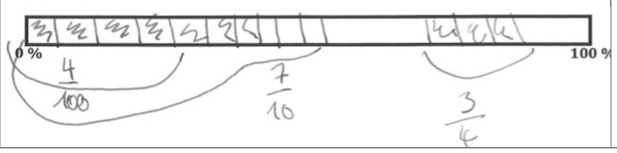
0 % 4 % 50 % 70 % 75 % 100 %

Hinweise zur Auswertung

Übergreifende Fehler

Typische Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
z. B. $\frac{4}{5} = \frac{\boxed{20}}{100}$	Erweiterungsfaktor wird in Zähler übernommen (5 · 20 = 100, also 20/100) oder Zähler wird durch Multiplikation von Zähler und Nenner erhalten (4 · 5 = 20).	Ggf. **B1 B** zum Wiedererarbeiten einfacher Zehntel und Hundertstelbrüche. Erarbeiten des Erweiterns auf 100 in der Streifentafel und rechnerisch (1.1 - 1.2). Erarbeiten des Erweiterns auf spezielle Brüche (1.3).
z. B. $\frac{4}{5} = \frac{\boxed{40}}{100}$ oder $\frac{7}{25} = \boxed{70}\%$	Der Zähler – auch von Brüchen mit Nenner ≠ 10 – wird, um einen Hundertstelbruch bzw. eine Prozentzahl zu erhalten, mit 10 multipliziert.	
z. B. $\frac{3}{100} = 30\ \%$	Unsicherheiten bei den Stellenwerten.	Ggf. **B1 B** zum Erarbeiten einfacher Zehntel- und Hundertstelbrüche. Erarbeiten des Erweiterns von Brüchen auf Hundertstelbrüche (2.1). Ein Gefühl für die Größenordnung von Prozenten entwickeln (2.3). Wichtige Prozentzahlen und ihre Darstellungen systematisieren (2.8).
z. B. $\frac{4}{50} = \boxed{0{,}8}\ \%$ oder $\frac{3}{100} = \boxed{0{,}03}\ \%$	Brüche werden korrekt in Dezimalzahlen umgewandelt. Diese werden aber einfach vor dem Prozentzeichen notiert.	
z. B. $\frac{4}{50} = \boxed{4{,}5}\ \%$ oder $\frac{7}{25} = \boxed{7{,}25}\%$	*Bruchstrich-trennt*: Der Bruchstrich wird als Komma interpretiert.	Erarbeiten der Bedeutung von Prozenten in **B1 B**.
z. B. $\frac{3}{100} = 3\ \%$ oder $\frac{4}{50} = 4\ \%$	Der Zähler des Anteils wird als Prozentzahl übernommen.	

Diagnoseaufgabe 2: Brüche und Prozente umwandeln

	Typische Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
c)	Es werden nur Hundertstelbrüche, aber keine weiteren gekürzten Brüche angegeben.	Prozente werden u.U. auf den Nenner 100 eingeschränkt interpretiert bzw. das Kürzen wird nicht (sicher) beherrscht.	Erarbeiten verschiedener Schreibweisen für Prozente (gleichwertige Brüche; 2.2). Üben und Flexibilisieren (2.4; 2.6 - 2.7). Ggf. Kürzen thematisieren (**B2B**).
	Es wird falsch gekürzt.	Es bestehen u.U. Unsicherheiten beim Erweitern und Kürzen.	Ggf. Kürzen und Erweitern erarbeiten in **B2B**. Flexibilisieren im Umgang mit verschiedenen Schreibweisen von Prozenten (2.4 - 2.6).
d)	Es werden nur Brüche eingezeichnet.	Evtl. wird der Auftrag überlesen oder es bestehen Schwierigkeiten beim Umwandeln von Brüchen in Prozente.	Noch einmal gezielt nachfragen; bei Bedarf das Umwandeln erarbeiten (2.1).
	Brüche werden nach Größe des Nenners geordnet. 	Anteile werden als zwei voneinander getrennte natürliche Zahlen gedeutet.	Anteilsbegriff erarbeiten in **B1A**.
	Brüche werden nach Größe des Zählers geordnet. 		
	Richtige Reihenfolge, aber Relationen stimmen nicht (z. B. 4/100 sehr mittig).	Gefühl für Größenordnung der Anteile fehlt noch.	Üben mit verschiedenen Darstellungen von Prozenten (2.1; 2.3; 2.8).
	Brüche werden alle nebeneinander als Anteile eingezeichnet. 	Evtl. wird der Streifen als Darstellungsmittel falsch gedeutet.	

B2C Wie können wir fördern, Brüche und Prozente ineinander umzuwandeln?

1 Brüche in Hundertstelbrüche umwandeln

1.1 **Erarbeiten**

Ziel: Hundertstelbrüche als besondere gleich große Brüche in der Streifentafel finden

Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) EA, dann PA, c) Aufgabengenerator (PA)

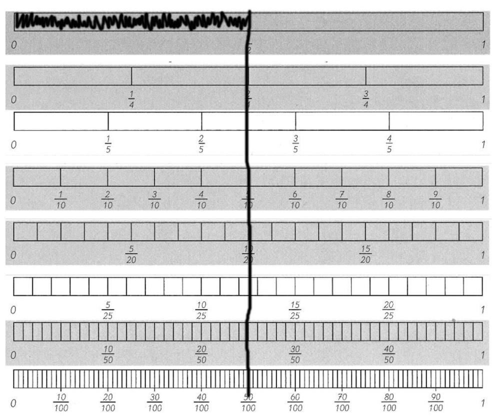
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Hundertstelbrüche als besondere gleich große Brüche in der Streifentafel finden. Hundertstelbrüche werden als Zwischenschritt vor der Bestimmung von Prozenten eingeführt, da sie direkt in der Streifentafel abgelesen werden können. Das Finden gleich großer Brüche im 100tel-Bruchstreifen stellt dabei eine besondere Fokussierung des Suchens gleich großer Brüche aus **B2A** dar.
Die hier abgebildeten und relevanten Streifen findet man in der Streifentafel schnell über die Markierung in Form von grauer Schrift am Rand wieder. In der großen Streifentafel können Hundertstelbrüche leichter abgelesen werden. Dieser wichtige empirische Zugang sollte im Verlauf der Fördereinheit bzw. des Bausteins zunehmend durch die Verinnerlichung der relevanten Strukturen verlassen werden.

Hintergrund zu b):
(1) stellt eine operative Variation dar, die den Blick auf die Struktur zwischen verschiedenen Streifen („Ein Stück im 5tel-Streifen entspricht x Feldern im 100tel-Streifen.“) lenken soll.
In (2) sollte der Fokus auf das Entdecken der Strukturen gelenkt werden: Die drei Brüche stehen alle auf derselben Linie in der Tafel, da sie gleichwertig sind.

Methode zu c):
In Aufgabenteil c) kann es passieren, dass Lernende schon Brüche wie 1/8 auswählen, die nicht erweiterbar sind. Diese sollten zunächst zurückgestellt und in 1.3 besprochen werden.

1.1 Hundertstelbrüche in der Streifentafel finden

Emily will den Bruch $\frac{1}{2}$ in Prozent umwandeln.
Sie weiß, dass Prozente Hundertstelbrüche sind, und sucht deshalb im Hundertstel-Streifen der Streifentafel. Hier siehst du einen Ausschnitt Emilys Streifentafel:



Emily

a) Beschreibe, was Emily macht.
- Wie kann man $\frac{1}{2}$ als Hundertstel schreiben? Wie viel Prozent ist das?
- Welche Anteile sind genauso groß?
  Finde gleichwertige Anteile, also gleich große Anteile zu $\frac{1}{2}$ in der Streifentafel.

Emily schaut in der Streifentafel, welcher Anteil im Hunderstel-Streifen gleichwertig zu 1/2 ist. Das ist der Anteil 50/100. 50 von 100 sind 50%. Weitere gleichwertige Anteile sind: 2/4, 3/6, 10/20, etc.

b) Finde wie Emily gleichwertige Brüche mit Nenner 100 mit der Streifentafel oder am digitalen Bruchstreifen (wie erzeugst du da Hundertstelstreifen?). Was fällt dir auf?

(1) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ (2) $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{10}{25}$

c) Stellt euch gegenseitig Umwandlungsaufgaben zwischen Hundertsteln und anderen Anteilen.
- Eine Person nennt einen Bruch.
- Die andere Person verfeinert den Bruch zuerst in Hundertstel.
- Dann verfeinert oder vergröbert sie ihn in andere gleichwertige Anteile.

Wechselt euch ab. Kontrolliert mit der Streifentafel oder den digitalen Bruchstreifen.

1.2 Erarbeiten

Ziel: Hundertstelbrüche als besondere gleich große Brüche durch Erweitern finden

Material: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Hundertstelbrüche als besondere gleich große Brüche durch Erweitern finden. Hier sollte an die Begrifflichkeiten aus **B2A** und **B2B** (verfeinern, vergröbern, erweitern, kürzen) angeknüpft werden.
Impulse:

- Was genau macht Jonas? Verfeinert oder vergröbert er?
- Was passiert mit den zugehörigen Streifen in der Streifentafel?

Methode:
Stärkere Lernende können diese Aufgabe nur kurz bearbeiten bzw. ggf. auch überspringen.

1.2 Brüche mit Nenner 100 durch Erweitern finden

Jonas will den Anteil $\frac{1}{4}$ als Bruch mit Nenner 100 schreiben. Er macht das so:

$\frac{1}{4} \xrightarrow{\cdot 25} \frac{\square}{100}$ also $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

a) Beschreibe Jonas´ Rechenweg. Nutze die Sprachmittel, die du schon gelernt hast.

*Im 4tel-Streifen ist das Ganze in 4 gleich große Felder eingeteilt, davon ist 1 Feld markiert.
Im 100tel-Streifen ist dasselbe Ganze in 100 gleich große, viel kleinere Felder eingeteilt. Das sind 25 mal so viele feinere Felder. Also muss auch der markierte Teil 25 mal so fein eingeteilt sein. Daher werden im 100tel-Streifen 25 Felder von 100 markiert.*

b) Wandle die Anteile wie Jonas in Brüche mit dem Nenner 100 um. Was fällt dir auf?

(1) $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}$ (2) $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{10}{25}$

1.3 Erarbeiten

Ziel: Muster erkennen und den Zusammenhang zwischen Teilbarkeit und Hundertstelbrüchen reflektieren

Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c) UG; d) PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Muster erkennen und den Zusammenhang zwischen Teilbarkeit und Hundertstelbrüchen reflektieren.
Eine typische Schwierigkeit ist, dass der Zugriff über die Streifentafel mit gewisser Unsicherheit behaftet bleibt. Manche Lernende finden dadurch, dass man sehr genau ablesen muss, manchmal vermeintlich doch einen gleichwertigen Hundertstelbruch zu 1/8.
Diese Grenze des empirischen Zugriffs sollte durch Jonas Rechenweg in 1.2 überwunden werden. Dieser kann selbst wieder inhaltlich über das feinere Einteilen des Streifens erklärt werden.
Sarahs Bruch lässt sich erst kürzen und dann auf 100 erweitern. Den Lernenden sollte im Streifen plausibel gemacht werden, dass zwei Achtel genauso viel sind wie ein Viertel, was wiederum im 100tel-Streifen darstellbar ist.

Methode:
Teils finden Lernende auch Anteile, deren Nenner zwar nicht ohne Rest in die 100 passt, die aber durch Kürzen und anschließendes Erweitern doch in einen Hundertstelbruch überführt werden können. Diese Anteile für d) zurückstellen.

1.3 Anteile, für die man keinen Bruch mit Nenner 100 findet

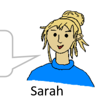
a) Kenan wundert sich:

Hilf Kenan: Erkläre, warum man $\frac{1}{8}$ nicht als Bruch mit Nenner 100 angeben kann.

(1) Erkläre mit der Streifentafel. (2) Erkläre mit Jonas´ Rechenweg.

b) Finde weitere Anteile, die man nicht als Brüche mit Nenner 100 schreiben kann.

c) Sarah hat eine Entdeckung gemacht:



Hilf Kenan: Erkläre, warum man $\frac{1}{8}$ nicht als Bruch mit Nenner 100 angeben kann.

Überprüfe Sarahs Entdeckung:
Wie kann man $\frac{2}{8}$ in einen Bruch mit Nenner 100 umwandeln?
Was ist hier anders als in a)? Überprüfe mit der Streifentafel oder flexiblen Bruchstreifen.

*Bei 2/8 kann man zuerst vergröbern bis ein Nenner entsteht, der sich auf 100 erweitern lässt, nämlich 4: Der Anteil 1 von 4 ist gleich groß wie 25 von 100.
Bei 1/8 geht das nicht. 1 und 8 haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1. Man kann also nicht vergröbern.
Für Spezialisten: 1/8 sind 12,5%, die Hälfte von einem Viertel*

d) Tauscht eure Anteile zu b) aus:
Sind Brüche dabei, die man wie Sarah doch als Brüche mit Nenner 100 schreiben kann?
Überprüft mit der Streifentafel.

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

2.1 Erarbeiten

Ziel: Hundertstelbruchschreibweise mit Prozenten verknüpfen; das Erweitern als Verfahren etablieren

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG, b), c), d) jeweils EA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Hundertstelbruchschreibweise mit Prozenten verknüpfen und das Erweitern als Verfahren dazu vertiefen. Die Motivation für die Prozentschreibweise ist, dass sie gut zum Ordnen von Brüchen ist.
Wenn man den Bruch auf Hundertstel erweitert, dann gibt der Zähler die Prozentzahl an. Prozente lassen sich – wie natürliche Zahlen – gut vergleichen.

Methode:
Lernende wollen Anteile oft millimeter-genau eintragen. Dafür sensibilisieren, Prozente nur ungefähr einzuzeichnen und sich an anderen Größen wie 50 % zu orientieren (d. h. relative Zahlbezüge anschauen).
Erweiterungsfaktor für Zähler und Nenner aufschreiben lassen, damit Erweitern und Multiplizieren nicht verwechselt werden.
Kürzen muss von schwächeren Lernenden nicht mit der *besten* Zahl vorgenommen werden. Wichtiger ist, zu thematisieren, dass es noch weitere Schreibweisen gibt.

Impuls zu c):
- Kann es sein, dass man Zähler und Nenner mit verschiedenen Zahlen vervielfacht? → Nicht möglich: Teil und Ganzes werden gleich verfeinert.

2.1 Prozente – Brüche mit immer demselben Nenner 100

Maurice schreibt Brüche als Prozente, damit er sie vergleichen kann.

$\frac{1}{10} \overset{\cdot 10}{=} \frac{10}{100} = 10\%$ $\frac{3}{4} \overset{\cdot 25}{=} \frac{75}{100} = 75\%$


Maurice

a) Schreibe $\frac{4}{10}$ und $\frac{10}{50}$ jeweils als Prozent. Beschreibe, wie du dabei vorgehst. Wie kannst du nun entscheiden, ob die Brüche gleich groß sind?

b) Zeichne beide Brüche aus a) ungefähr im Prozentstreifen ein:

c) Schreibe als Prozentzahl. Welcher ist der größte Bruch? Schreibe auf, mit welcher Zahl du den Zähler und den Nenner erweitert hast.

(1) $\frac{1}{2} \overset{\cdot 50}{=} \frac{50}{100} = 50\ \%$ (2) $\frac{3}{5} \overset{\cdot 20}{=} \frac{60}{100} = 60\ \%$

(3) $\frac{5}{25} \overset{\cdot 4}{=} \frac{20}{100} = 20\ \%$ $\frac{8}{50} \overset{\cdot 2}{=} \frac{16}{100} = 16\ \%$

d) Jetzt umgekehrt. Wandle die Prozente in Brüche um: 50 %, 55 %, 64 %
Beschreibe, wie du dabei vorgehst.

50 %:
Im 100tel-Streifen sind 50 von 100 Feldern markiert. Jetzt überlege ich: Wie kann ich gleichmäßig gröber einteilen?
Je 50 Felder lassen sich zu einem größeren Feld bündeln.
Dann entstehen 2 gleich große Felder im Ganzen. Von diesen 2 Feldern ist 1 Feld markiert. → 1/2
…

2.2 Üben

Ziel: Verschiedene Schreibweisen für Prozente erklären

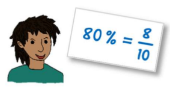
Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: EA/PA dann UG

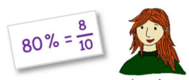
Hintergrund:
Die Lernenden sollen verschiedene Schreibweisen für Prozente erklären. Gleichwertigkeit wird hier für Prozente explizit gemacht. Phänomenologisches Überzeugen an der Streifentafel und strukturelle Erklärung an der Rechnung bzw. Verknüpfen der Rechnung mit der Struktur der Streifentafel: 80 % kann man direkt als 80/100 aufschreiben, da „pro Cent“ „von Hundert“ bedeutet. Gleichheit der beiden Brüche ergibt sich, da 1/5 so groß ist wie 20/100. Also sind 4/5 so groß wie 80/100.

2.2 Kann 80 % zu zwei Brüchen gleichzeitig gehören?

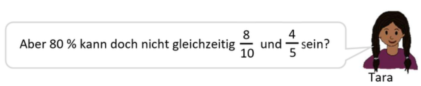
Kenan und Leonie haben beide 80 % in einen Bruch umgewandelt.



Kenan



Leonie



Tara

Überprüfe Kenans und Leonies Lösung durch eine Rechnung und mit der Streifentafel. Erkläre das Ergebnis.

2.3 **Üben**

Ziel: Prozente mit der Anteilsvorstellung verknüpfen

Material: Ggf. Streifentafel, ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann UG, b) PA, c) EA, dann PA, evtl. UG

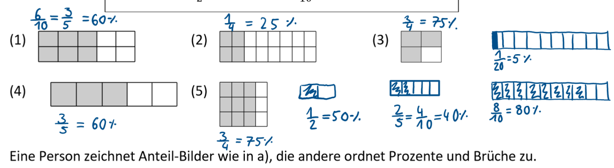
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Prozente mit der Anteilsvorstellung verknüpfen. Es lassen sich viele Konzepte wiederholend thematisieren: Lernende versuchen z.T. Anteile durch Hochrechnen der Kästchenanzahl auf 100 zu bestimmen (z. B. „5 Kästchen passen 20mal in die 100, deswegen ist ein Kästchen 20 %“). Sie scheitern dann aber z. B. an den 12 Kästchen im rechten Bild. Hier muss neu strukturiert werden durch das Bilden neuer Einheiten: Eine Reihe mit 3 Kästchen entspricht 1/4 der Gesamtfläche. D. h. Aspekte des Anteils von Mengen (1/4 von 12) und des Kürzens (Vergröbern der Einteilung) kommen hier zum Tragen.

Methode:
Lernende können aushandeln, ob sie auf die dunklen oder die hellen Flächen schauen wollen.
Das Finden der Prozente fällt leichter, wenn zunächst in Anteilen gedacht wird. Erst den Bruch aufschreiben und dann umwandeln.
Aufgabenteil b) ist selbstdifferenzierend über Komplexität der Bilder. Darauf achten, dass Bilder lösbar sind bzw. unlösbare thematisieren. Andere Darstellungen (z. B. Kreise) können Schwierigkeiten bereiten.

2.3 Brüche und Prozente in Bildern bestimmen

a) Welche Brüche und Prozente passen zu welchen Bildern?
Falls Brüche übrig bleiben: Zeichne ein passendes Rechteck-Bild.
Falls Bilder übrig bleiben: Ergänze passende Prozente und Brüche.

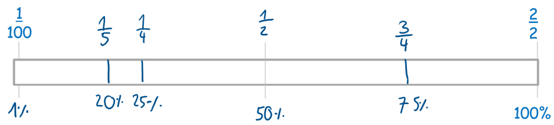
25 %	$\frac{1}{2}$	80 %	$\frac{4}{10}$	5 %	60 %



b) Eine Person zeichnet Anteil-Bilder wie in a), die andere ordnet Prozente und Brüche zu. Wechselt euch ab.

c) Merke dir für einige Brüche ihre Prozentschreibweise. Schreibe dafür die Brüche ungefähr an den Prozentstreifen. Schreibe auch die passenden Prozente dazu.

(1) $\frac{2}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{1}{10}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{5}$ (6) $\frac{1}{100}$ (7) $\frac{1}{4}$



2.4 **Üben**

Ziel: Umwandeln von Brüchen und Prozenten üben

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann PA; b) EA, dann PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen das Umwandeln von Brüchen und Prozenten ineinander üben. Es können zu 20 % auch weitere Anteile gefunden werden.

Methode:
Darauf hinweisen, dass es um ein Muster innerhalb einer Spalte geht: Es geht um die Abgrenzung von Kürzen / Erweitern (3) und Dividieren / Multiplizieren (1) / (2) sowie um die Auswirkungen von Variationen in Zähler und / oder Nenner.

2.4 Was passiert, wenn …?

a) Gib mehrere Brüche für die beiden Prozente an.
Was stellst du fest, wenn du die Brüche für 20 % und 40 % vergleichst?

$20\,\% = \frac{20}{100} = \frac{10}{50} = \frac{4}{20}$ $\qquad$ $40\,\% = \frac{40}{100} = \frac{20}{50} = \frac{8}{20}$

b) Gib jeweils die Prozentzahlen an. Vergleiche die Aufgaben der einzelnen Spalten und ihre Ergebnisse. Was ist gleich, was ist unterschiedlich?

(1) $\frac{60}{100} = 60\,\%$ $\qquad$ (2) $\frac{10}{100} = 10\,\%$ $\qquad$ (3) $\frac{20}{100} = 20\,\%$

$\frac{15}{100} = 15\,\%$ $\qquad$ $\frac{10}{25} = 40\,\%$ $\qquad$ $\frac{5}{25} = 20\,\%$

2.5 **Erarbeiten**

Ziel: Zusammenhang zwischen Erweitern und Multiplizieren reflektieren

Material: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: PA, dann UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen den Zusammenhang zwischen Erweitern und Multiplizieren reflektieren. Hier sollte an die Idee des Verfeinerns für das Erweitern angeknüpft werden. Es hilft zu verstehen, warum die Prozentzahl nicht viermal so groß wird.

2.5 Was passiert mit der Prozentzahl beim Erweitern?

a)

Hat Leonie Recht? Wie muss man den Zähler und den Nenner von $\frac{1}{5}$ verändern, damit die Prozentzahl viermal so groß ist?

Wie gehst du vor? Überprüfe dein Ergebnis mit der Streifentafel.

Wenn ich Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziere, bleibt der Anteil gleich, weil die Beziehung vom Teil zum Ganzen sich nicht verändert. Wenn ich möchte, dass die Prozentzahl viermal so groß ist, darf ich nur den Teil vergrößern - nicht Teil und Ganzes gemeinsam. Denn: Mehr Felder vom Ganzen —> größerer Anteil, d. h. größere Prozentzahl

2.6 - 2.7 **Üben**

Ziel: Operativ üben

Umsetzung: 2.6 a) EA, 2.6 b) Aufgabengenerator (PA); 2.7 EA, dann evtl. UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen hier unterschiedliche Lösungen finden und gezielt Muster entdecken.

Lösung:
Für Teil 1 gibt es viele Möglichkeiten, z. B. 10/20 = 50 %, 5/20 = 25 %, 1/20 = 5 %, ...
Wichtige Prozentzahlen (siehe auch 2.8) sollten hervorgehoben und gemerkt werden.
Für Teil 2 gibt es nur wenige Lösungen, die ruhig komplett genannt werden sollten: 1/5 = 20 %, 2/5 = 40 %, 3/5 = 60 %, 4/5 = 80 %, 5/5 = 100 % = 1.

2.6 Mehrere Lösungen

a) Welche Zahlen können hier stehen? Schreibe verschiedene Lösungen auf.

(1) $\frac{20}{100} = 20\ \%$ (2) $\frac{5}{10} = 50\ \%$ (3) $\frac{20}{200} = 10\ \%$

b) Stellt euch gegenseitig ähnliche Aufgaben.
Eine Person denkt sich eine Aufgabe mit Lücken aus, die andere findet passende Zahlen.
Wechselt euch ab.

2.7 Prozente gesucht

Finde ...
- drei Prozente, die du in einen Bruch mit Nenner 20 gröber einteilen kannst.
- drei Prozente, die du in einen Bruch mit Nenner 5 feiner einteilen kannst.

2.8 **Üben**

Ziel: Wichtige Prozentzahlen und ihre verschiedenen Repräsentationen miteinander verknüpfen

Material: Paare finden, Folienstifte

Umsetzung: GA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen wichtige Prozentzahlen und ihre verschiedenen Repräsentationen miteinander verknüpfen und alltagstypische Verbalisierungen sollten auswendig gewusst werden. Wichtig ist, über die Passung der Karten zu reden. Karten können übrigbleiben, wenn Teil und Rest in den Bildern uminterpretiert werden.
Methode: Blankokarten können zur Erstellung eigener Karten mit Folienstift beschrieben werden.
Spielvarianten zur Differenzierung: Aufgedeckte Karten bleiben offen liegen oder alle Karten liegen von Beginn an offen.

2.8 Paare finden mit Prozenten und Brüchen

Spielt „Paare finden“:
- Findet Paare mit jeweils einem Bruch und einer Prozentangabe oder einem Bild.
- Erfindet selbst noch eigene Karten und spielt mit ihnen.

Vorsicht: Es können Karten übrig bleiben.