Mathe sicher können

Didaktischer Kommentar zum Diagnose- und Fördermaterial

N6 Verständig Multiplizieren und Dividieren

Inhalt

Hintergrund — Worauf kommt es beim Additions- und Subtraktionsverständnis inhaltlich an?

Baustein N6A — **Ich kann sicher mit Vielfachen von 10 multiplizieren und dividieren**
- Was können wir diagnostizieren?
- Wie können wir fördern?

Baustein N6B — **Ich kann sicher multiplizieren und meine Rechenwege erklären**
- Was können wir diagnostizieren?
- Wie können wir fördern?

Baustein N6C — **Ich kann sicher dividieren und meine Rechenwege erklären**
- Was können wir diagnostizieren?
- Wie können wir fördern?

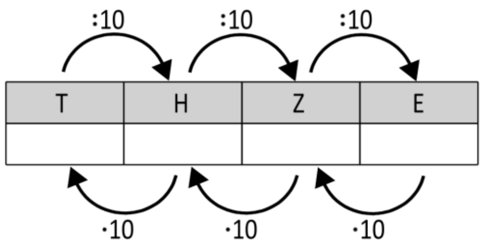
Zitierbar als: Akinwunmi, Kathrin, Deutscher, Theresa, Selter, Christoph, Mosandl, Corinna, Nührenbörger, Marcus, Prediger, Susanne, Pöhler-Friedrich, Birte & Böing, Lena (2025). Mathe sicher können – Didaktischer Kommentar zu N6: Verständig Multiplizieren und Dividieren. Zu Christoph Selter, Susanne Prediger, Marcus Nührenbörger & Stephan Hußmann (Hrsg.), Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen (2. Auflage). Open Educational Resources unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/nz#n6

Hinweis zu verwandtem Material: Die zweite 2. Auflage wurde erheblich weiterentwickelt. Zu den Handreichungen ist auch das Diagnose- und Fördermaterial sind verfügbar sowie Erklärvideos und Fortbildungsangebote, alles zu finden unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de.

N6A Mit Vielfachen von 10 multiplizieren und dividieren: Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Multiplizieren und Dividieren mit Vielfachen von 10 (darunter werden im Folgenden sowohl Zehnerpotenzen wie 10, 100 oder 1000 als auch Vielfache von 10, die keine reinen Zehnerpotenzen sind wie 40, 300 oder 6000 verstanden) sind wichtige Voraussetzungen für das Kopfrechnen und das verständige Rechnen. Wird der Thematisierung des Multiplizierens mit Vielfachen von 10 im Unterricht nicht genug Raum gegeben, kann es passieren, dass Lernende ein verständnisloses Anhängen und Wegstreichen von Nullen automatisieren. Dieses wiederum führt schnell zu falschen Anwendungen (Wegstreichen und Anhängen werden vertauscht usw.). Wichtiger noch als die korrekte Ausführung der Multiplikation und Division mit Vielfachen von 10 sind die damit verbundenen Einsichten in das Stellenwertsystem (siehe Abbildung), welche auch für das Verständnis von Dezimalzahlen bedeutsam sind.



Multiplikative Beziehungen zwischen Stellenwerten

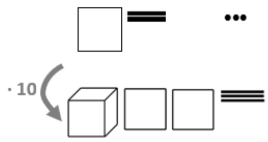
In diesem Baustein werden multiplikative Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten erarbeitet. Dazu untersuchen die Lernenden mit Hilfe der Stellentafel, des Würfelmaterials und des Zahlenstrahls, welche Auswirkungen das Multiplizieren bzw. Dividieren mit Zehnerpotenzen hat. Werden beispielsweise zwei Hunderterplatten verzehnfacht, so erhält man zwei Tausenderwürfel. Dieser multiplikative Vergleich, der durch Handlungen am Material veranschaulicht wird, bewirkt in der Stellenwerttafel eine Verschiebung der 2 aus der Hunderterspalte in die Tausenderspalte. Am Zahlenstrahl bedeutet dies, dass aus zwei Hunderterschritten zwei Tausenderschritte werden.

Für das Rechnen mit Vielfachen von 10 wird die Strategie *Schrittweises Rechnen* erarbeitet, die unter Ausnutzung des Assoziativgesetzes auf das Multiplizieren mit reinen Zehnerpotenzen zurückgreift. So lässt sich die Aufgabe $7 \cdot 800$ über die Aufgabe $7 \cdot (8 \cdot 100)$ in $(7 \cdot 8) \cdot 100$ verändern. Dieser Baustein bildet die Grundlage für verständiges Multiplizieren in Baustein **N6 B** und verständiges Dividieren in Baustein **N6 C**.

Veranschaulichung und Material

Würfelmaterial

Als Darstellungen der Stellenwerte werden in diesem Baustein Tausenderwürfel, Hunderterplatten, Zehnerstangen und Einerwürfel genutzt.

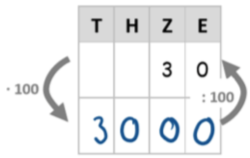


Verzehnfachung am Würfelmaterial

Beim Verzehnfachen wird beispielsweise aus einer Zehnerstange eine Hunderterplatte, da zehn Zehnerstangen genauso viel sind wie eine Hunderterplatte. Entsprechend werden beim Verhundertfachen oder Vertausendfachen aus zwei Einerwürfeln zwei Hunderterplatten oder zwei Tausenderwürfel, beim Dividieren umgekehrt. Um die multiplikative Veränderung und die Kommunikation über das Verzehnfachen, bzw. die Umkehrung zu ermöglichen, sollten jeweils beide Mengen (die ursprüngliche und die durch Multiplikation bzw. Division erhaltene Menge) deutlich getrennt voneinander auf dem Tisch sichtbar sein. In der Fördereinheit sind jeweils beide Mengen zeichnerisch dargestellt, wobei das Multiplizieren mit, bzw. Dividieren durch 10/100/1000 jeweils mit einem Pfeil dargestellt ist.

Stellentafel

Die Handlungen am Material werden mit Eintragungen in der Stellenwerttafel verbunden. So wird herausgearbeitet, dass das Multiplizieren und Dividieren mit Zehnerpotenzen immer ein Verschieben der Ziffern in der Stellentafel bewirkt.

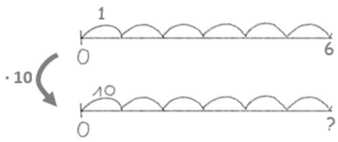


Verschiebung der Stellenwerte in der Stellentafel

Dies bietet eine tragfähige Vorstellung, sodass die Lernenden Multiplizieren mit 10 und Dividieren durch 10 nicht mit dem Anhängen oder Wegstreichen einer Null erklären sollten.

Zahlenstrahl

Am Zahlenstrahl kann die Verzehnfachung wie folgt hineingesehen werden:



Verzehnfachung am Zahlenstrahl

Ich habe 6 Einerschritte. Wenn ich die Einerschritte verzehnfache, habe ich zehnmal so viele Schritte, also 6 Zehnerschritte. Analog bündele ich 60 Einerschritte am Zahlenstrahl in 6 Zehnerschritte, denn 60 Einer sind genauso viel wie 6 Zehner. Also werden aus 6 Einerschritten 6 Zehnerschritte.

Aufbau der Förderung

Die Förderung besteht aus vier Fördereinheiten:

1. Multiplizieren mit 10 verstehen
2. Dividieren durch 10 verstehen
3. Mit 100 und 1 000 multiplizieren und dividieren
4. Mit Vielfachen von 10 multiplizieren und dividieren

Der Baustein beginnt in **Fördereinheit 1** mit der Multiplikation mit 10, wobei zunächst einzelne Materialien (nur Einer oder Zehner oder Hunderter) verzehnfacht werden und diese Operationen mit Würfelmaterial, in der Stellenwerttafel und am Zahlenstrahl untersucht werden. Anschließend werden diese Beobachtungen auch auf Summen verschiedener Stellenwerte angewendet (wie 123 · 10). In **Fördereinheit 2** wird auf der Grundlage eines Verständnisses der Division als Umkehrung der Multiplikation (Baustein **N4 B**) die Division durch 10 erarbeitet. An die in Fördereinheit 1 und 2 erarbeiteten Handlungen mit den Materialien anknüpfend wird in **Fördereinheit 3** die Multiplikation mit 100 und 1000 thematisiert. Abschließend wird die Multiplikation und Division mit Vielfachen von 10 behandelt (**Fördereinheit 4**), die auf eine Multiplikation mit einstelligem Faktor und einer anschließenden Multiplikation mit einer Zehnerpotenz zurückgeführt wird: Zum Beispiel 4 · 60 = (4 · 6) · 10.

Digitale Medien zum Baustein

Alle digitalen Medien werden kontinuierlich ausgebaut und sind stets aktuell verlinkt unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/nz#n6

- Im **didaktischen Themenfilm** werden die aufgeführten Aspekte zum Verständigen Rechnen mit Fallbeispielen illustriert und es wird aufgezeigt, worauf es bei der Förderung ankommt: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/themenvideo/rechnen (nach Registrierung zugänglich)
- Die digitale Diagnose wird in zunehmend mehr Bundesländern im **MSK-Online-Check** möglich.

Weiterführende Literatur

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken* (ab Klasse 3) (S. 1 - 60). Grundschulverband.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Spektrum.

Wagner, A. (2006). *Zum Kopfrechnen in der Hauptschule. Eine empirische Studie zu den Kopfrechenleistungen von Hauptschülern der Orientierungsstufe bei Aufgaben zur Multiplikation und Division mit evaluierter Unterrichtspraxis*. Franzbecker.

Wittmann, E. & Müller, G. N. (2012a). *Das Zahlenbuch 2*. Klett.

Wittmann, E. & Müller, G. N. (2012b). *Das Zahlenbuch 3*. Klett.

N6A Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 15-30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Bei Schwierigkeiten bei der Notation des Rechenwegs kann es helfen, die Lernenden aufzufordern, ihren Rechenweg bzw. ihr Kopfrechnen mündlich zu erläutern. Anschließend werden sie gebeten, das mündlich Beschriebene aufzuschreiben.

Äußern die Lernenden, dass sie Regeln des Nullen-Anhängens oder Nullen-Wegstreichens nutzen, werden sie aufgefordert, auch dies zu notieren.

Wenn alle Aufgaben über das Anhängen oder Wegstreichen von Nullen gelöst werden, fordert die Lehrkraft zur zusätzlichen Notation eines weiteren Rechenwegs auf, um inhaltliche Vorstellungen zur Multiplikation mit Vielfachen von 10 (insbesondere mit reinen Zehnerpotenzen) zu erheben.

1 Multiplizieren mit 10 verstehen

Rechne aus und schreibe deinen Rechenweg auf.

(1) 37 · 10 = 370
30 · 10 = 300
7 · 10 = 70

(2) 358 · 10 = 3580
300 · 10 = 3000
50 · 10 = 500
8 · 10 = 80

(3) Erkläre, wie du rechnest, zeichne gerne auch ein Bild dazu.
Ich zerlege 37 in 3 Zehner und 7 Einer. Aus 3 Zehnerstangen werden 3 Hunderterplatten. Aus 7 Einern werden 7 Zehnerstangen.

2 Dividieren durch 10 verstehen

Rechne aus und schreibe deinen Rechenweg auf.

(1) 630 : 10 = 63
600 : 10 = 60
30 : 10 = 3

(2) 30 630 : 10 = 3063
30000 : 10 = 3000
630 : 10 = 63

3 Mit 100 und 1 000 multiplizieren und dividieren

Rechne aus und schreibe deinen Rechenweg auf.

(1) 37 · 100 = 3700
30 · 100 = 3000
7 · 100 = 700

(2) 240 000 : 1000 = 240
200 000 : 1000 = 200
40 000 : 1000 = 40

4 Mit Vielfachen von 10 multiplizieren und dividieren

Rechne aus und schreibe deinen Rechenweg auf.

(1) 20 · 30 = 600
2 · 3 = 6
6 · 100 = 600

(2) 50 · 600 = 30000
5 · 6 = 30
30 · 100 = 30 000

(3) 250 : 5 = 50
25 : 5 = 5
5 · 10 = 50

(4) 2 000 : 5 = 400
20 : 5 = 4
4 · 100 = 400

(5) Erkläre, wie du in (4) rechnest.
Die 2000 teile ich durch 100, weil ich 20:5 leichter rechnen kann als 2000:5. Das sind 4. Weil ich vorher durch 100 dividiert habe, muss ich die 4 noch mit 100 multiplizieren.

Hinweise zur Auswertung

Diagnoseaufgabe 1: Multiplizieren mit 10 verstehen

Typischer Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
85 angegeben, wahrscheinlich 37·1=48 (+1 bei jeder Ziffer gerechnet) und 37·0=37 addiert 827 angegeben, wahrscheinlich 358·1=469 (+1 bei jeder Ziffer gerechnet) und 358·0=358 addiert	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation mit Vielfachen von 10	An Baustein **N4 A** Vorstellung zur Multiplikation erarbeiten, insb. die Bedeutung der Null und Eins für die Multiplikation thematisieren
100 angegeben, vermutlich 3·10+7·10 gerechnet (analog 160 für Teilaufgabe 2 -> 3·10+5·10+8·10)	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation, insb. die Bedeutung der Stellenwerte beim schrittweisen Multiplizieren noch unklar	An 1.1 – 1.4 Multiplikation mit 10 erarbeiten und üben. Dabei die Stellenwerte fokussieren.
3070 angegeben, vermutlich 3·10 und 7·10 hintereinandergeschrieben (analog 305080 für Teilaufgabe 2)	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation, insb. die Bedeutung der Stellenwerte beim schrittweisen Multiplizieren noch unklar	
falsche Anzahl von Nullen	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation mit Vielfachen von 10, evtl. Anwendung der oberflächlichen Strategie des Anhängens (oder Wegstreichens) von Nullen	
Es wird nur das schriftliche Verfahren angewendet. Dies aber korrekt	Möglicherweise fehlendes Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation und Division mit Vielfachen von 10, insbesondere der 10, 100 und 1000	

Diagnoseaufgabe 2: Dividieren durch 10 verstehen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
(1)	6300 (306300 bei (2)) angegeben, da vermutlich multipliziert statt dividiert wird	Evtl. Flüchtigkeitsfehler, evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der (Multiplikation und) Division mit Vielfachen von 10: Durch die Oberflächenstrategie "Nullen anhängen" wird multipliziert statt dividiert	An 2.1 Division mit 10 erarbeiten und üben und mit der Multiplikation mit 10 in Beziehung setzen. Dabei die Stellenwerte fokussieren.
(2)	363 angegeben, vermutlich die Nullen gestrichen	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der (Multiplikation und) Division mit Vielfachen von 10, evtl. nur Oberflächenstrategie "Nullen wegstreichen" angewendet	

Diagnoseaufgabe 3: Mit 100 und 1 000 multiplizieren und dividieren

Typischer Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
122 angegeben, wahrscheinlich 37·1=48 (+1 bei jeder Ziffer gerechnet) und 2·37=74 addiert 300, wahrscheinlich 3·1=3 und 7·0=0 hintereinandergeschrieben und die zweite Null ergänzt 3070, vermutlich 3·100+7·00=307 und dann eine Null angehangen	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation mit Vielfachen von 10	An 3.1 Multiplikation und Division mit 100 und 1 000 erarbeiten. Evtl. an Baustein **N4 A** Vorstellung zur Multiplikation erarbeiten.
1000 angegeben, vermutlich 3·100+7·100 gerechnet	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation, insb. die Bedeutung der Stellenwerte beim schrittweisen Multiplizieren noch unklar	An 3.1 Multiplikation und Division mit 100 und 1 000 erarbeiten und üben. Dabei die Stellenwerte fokussieren.
300700 angegeben, vermutlich 3·100 und 7·100 hintereinandergeschrieben	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation, insb. die Bedeutung der Stellenwerte beim schrittweisen Multiplizieren noch unklar	
falsche Anzahl von Nullen	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation mit Vielfachen von 10, evtl. Anwendung der oberflächlichen Strategie des Anhängens (oder Wegstreichens) von Nullen	
Es wird nur das schriftliche Verfahren angewendet. Dies aber korrekt	Möglicherweise fehlendes Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation und Division mit Vielfachen von 10, insbesondere der 10, 100 und 1000	
240 000 000, da vermutlich multipliziert statt dividiert wird	Evtl. Flüchtigkeitsfehler, evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der (Multiplikation und) Division mit Vielfachen von 10: Durch die Oberflächenstrategie "Nullen anhängen" wird multipliziert statt dividiert	

Diagnoseaufgabe 4: Mit Vielfachen von 10 multiplizieren und dividieren

Typischer Fehler	**Mögliche Ursache**	**Förderung**
3000, da vermutlich die Nullen beim Ergebnis der Anzahl der Nullen der beiden Faktoren entsprechen	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation mit Vielfachen von 10, evtl. nur Fokus auf Nullen	An 1.1 – 3.1 Multiplikation und Division mit 10 erarbeiten und üben. Dabei die Stellenwerte fokussieren. Anschließend an 4.1 vertiefen.
Falsche Anzahl von Nullen angegeben	Evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation mit Vielfachen von 10, evtl. Anwendung der oberflächlichen Strategie des Anhängens (oder Wegstreichens) von Nullen	An 1.1 – 1.4 Multiplikation mit 10 erarbeiten und üben. Dabei die Stellenwerte fokussieren. Anschließend an 4.1 die Multiplikation mit 10 auf die Multiplikation mit Vielfachen von 10 übertragen und an 4.2 üben.
Es wird nur das schriftliche Verfahren angewendet. Dies aber korrekt	Möglicherweise fehlendes Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation und Division mit Vielfachen von 10, insbesondere der 10, 100 und 1000	
Es wird ein falscher Rechenweg angegeben: 2·3=6+00=600 oder 6+0+0=600 5·6=30+0+0+0=30 000 250:5=25:5=5+0=50 oder 200:5=20:5=4+00=400	Wahrscheinlich fehlendes Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der Multiplikation und Division mit Stufenzahlen: Als Strategie werden die Nullen aus den Zahlen angehängt. Dies wird als Addition aufgeschrieben. Daher ist die Strategie eventuell nicht tragfähig	
1250 oder 10 000, da vermutlich multipliziert statt dividiert wird	Evtl. Flüchtigkeitsfehler, evtl. unvollständiges Verständnis für die inhaltliche Bedeutung der (Multiplikation und) Division mit Vielfachen von 10: Durch die Oberflächenstrategie "Nullen anhängen" wird multipliziert statt dividiert	

N6A Wie können wir fördern, mit Vielfachen von 10 zu multiplizieren und zu dividieren?

1 Multiplizieren mit 10 verstehen

1.1 **Erarbeiten**

Ziel: Bedeutung des Verzehnfachens am Würfelmaterial erarbeiten

Material: Würfelmaterial

Umsetzung: 1.1 EA und UG, 1.2 a), b) UG; c), d) EA und UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Bedeutung des Verzehnfachens handelnd mit Würfelmaterial erarbeiten.
Um nachzuvollziehen, warum beim Verzehnfachen aus zwei Einerwürfeln zwei Zehnerstangen werden, ist es sinnvoll, dass die Lernenden z.B. für die Verzehnfachung von zwei Einerwürfeln 20 Einerwürfel legen und diese dann in zwei Zehnerstangen bündeln. Aus zwei Einerwürfeln werden somit zwei Zehnerstangen, weil in zwei Zehner 20 Einer passen. Das Bündeln mit dem Würfelmaterial eignet sich besonders gut, um beim Verzehnfachen zu veranschaulichen, dass sich der nächsthöhere Stellenwert immer aus 10 des nächstkleineren Stellenwertes zusammensetzt.

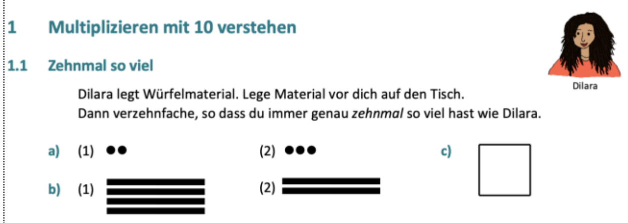
Methode:
Zu Beginn des Bausteins muss das Material eingeführt und die Begriffe *Einerwürfel*, *Zehnerstange, Hunderterplatte* und *Tausenderwürfel* geklärt werden, falls sie aus Baustein **N1** nicht bekannt sind.
Vorzugsweise übernimmt die Lehrkraft Dilaras Rolle. Sie legt zwei Einerwürfel vor sich und stellt die Aufgabe: Lege Material vor dich, so dass du genau *zehnmal* so viel hast wie ich.

Denksprache:

- „immer 10“
- „ich tausche … in …“
- „10 Zehner(-stangen) sind genauso viel wie 1 Hunderter(-platte).“

Impulse:

- Warum werden aus zwei Einerwürfeln zwei Zehnerstangen?
- Was ändert sich bei dir, wenn bei Dilara ein Einerwürfel hinzukommt?
- Wie viele Hunderter(-platten) brauche ich, um einen Tausender(-würfel) zu bauen?


1 Multiplizieren mit 10 verstehen

1.1 Zehnmal so viel

Dilara legt Würfelmaterial. Lege Material vor dich auf den Tisch.
Dann verzehnfache, so dass du immer genau *zehnmal* so viel hast wie Dilara.

a) (1) (2) c)

b) (1) (2)

1.2 – 1.3 **Erarbeiten**

Ziel: Bedeutung des Verzehnfachens vertiefen; Einer, Zehner und Hunderter mit Material, in der Stellenwerttafel und am Zahlenstrahl verzehnfachen

Material: Ggf. Würfelmaterial

Umsetzung: a), b) EA, c) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen ihr Verständnis zum Verzehnfachen durch den Wechsel zwischen Würfelmaterialdarstellung, Stellentafel und Zahlenstrahldarstellung vertiefen. So erkennen sie, was bei einer Verzehnfachung passiert. Mit zehn zu multiplizieren, bedeutet nämlich nicht, dass hinten eine Null dazukommt.
Allgemein sollen sie innerhalb verschiedener Darstellungen verstehen, dass beim Multiplizieren mit 10 z.B. aus 7 Einern 7 Zehner werden.

- Am Material heißt das: Aus 7 Einerwürfeln werden 7 Zehnerstangen.
- In der Stellentafel heißt das: Die 7 aus der Einerspalte wird (nach links) in die Zehnerspalte verschoben.
- Am Zahlenstrahl heißt das: Aus 7 Einerschritten werden 7 Zehnerschritte.

Sinnvoll ist es, die Stellentafel immer wieder mit dem Würfelmaterial und dem Zahlenstrahl zu vernetzen:

- Am Würfelmaterial:

„Ich habe 6 Einerwürfel. In die Stellentafel schreibe ich 6 in die Einerspalte. → Durch das Verzehnfachen habe ich zehnmal so viel. 60 Einerwürfel bündele ich in 6 Zehnerstangen, weil 60 Einer genauso viel sind, wie 6 Zehner. Also werden aus 6 Einerwürfeln 6 Zehnerstangen. Ich habe 6 Zehnerstangen und keine Einerwürfel. In die Stellentafel schreibe ich 6 in die Zehnerspalte und 0 in die Einerspalte."

- Am Zahlenstrahl:

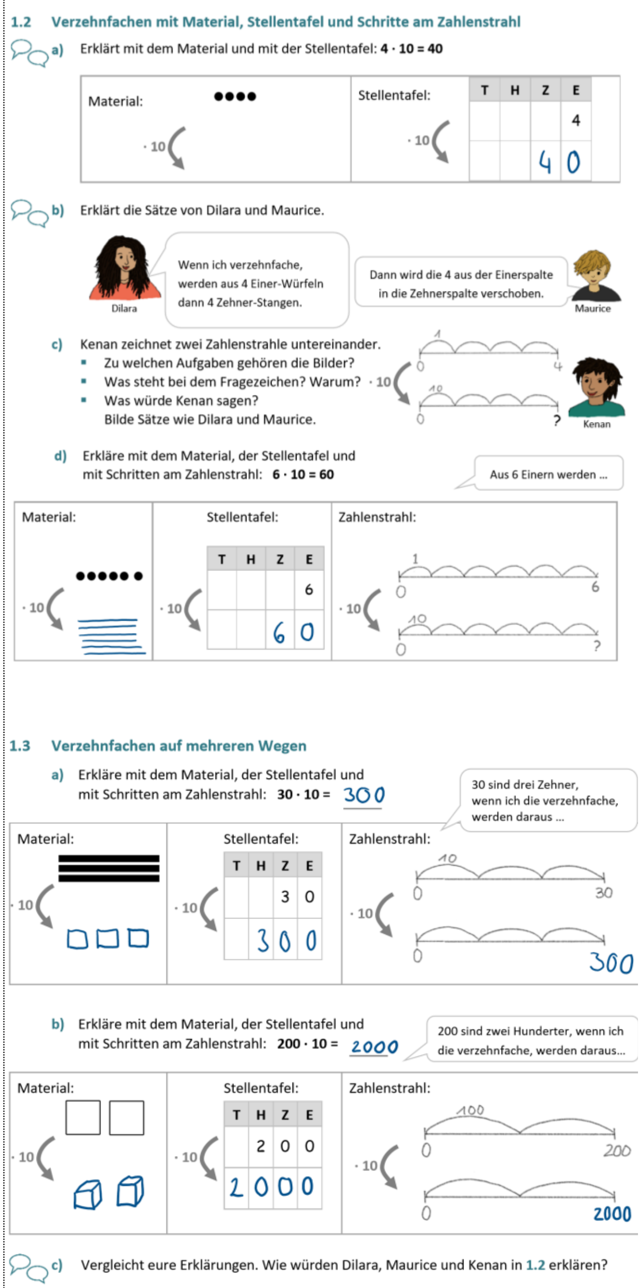
„Ich habe 6 Einerschritte. In die Stellentafel schreibe 6 in die Einerspalte. → Durch das Verzehnfachen habe ich zehnmal so viele Schritte. 60 Einerschritte bündele ich am Zahlenstrahl in 6 Zehnerschritte, denn 60 Einer sind genauso viel wie 6 Zehner. Also werden aus 6 Einerschritten 6 Zehnerschritte. In die Stellentafel schreibe ich 6 in die Zehnerspalte und 0 in die Einerspalte."

Darüber hinaus werden die Lernenden bei der Versprachlichung ihrer Beobachtungen unterstützt.

Wenn Aufgabe 1.2 ausführlich im Unterrichtsgespräch besprochen wird, so können die Lehrenden ihre Vorstellungen vom Verzehnfachen der Einer auf das Verzehnfachen der Zehner und Hunderter in Aufgabe 1.3 anwenden.

Impulse:

- Was genau verändert sich genau in der Stellentafel/am zahlenstrahl/am Material?
- Wo siehst du, dass es zehnmal so viel ist?



1.2 Verzehnfachen mit Material, Stellentafel und Schritte am Zahlenstrahl

a) Erklärt mit dem Material und mit der Stellentafel: **4 · 10 = 40**

b) Erklärt die Sätze von Dilara und Maurice.

c) Kenan zeichnet zwei Zahlenstrahle untereinander.
- Zu welchen Aufgaben gehören die Bilder?
- Was steht bei dem Fragezeichen? Warum?
- Was würde Kenan sagen?
Bilde Sätze wie Dilara und Maurice.

d) Erkläre mit dem Material, der Stellentafel und mit Schritten am Zahlenstrahl: **6 · 10 = 60**

1.3 Verzehnfachen auf mehreren Wegen

a) Erkläre mit dem Material, der Stellentafel und mit Schritten am Zahlenstrahl: **30 · 10 =** 300

b) Erkläre mit dem Material, der Stellentafel und mit Schritten am Zahlenstrahl: **200 · 10 =** 2000

c) Vergleicht eure Erklärungen. Wie würden Dilara, Maurice und Kenan in 1.2 erklären?

1.4 **Erarbeiten**

Ziel: Mehrstellige Zahlen mit Material, auf Zahlebene und in der Stellenwerttafel verzehnfachen

Material: -

Umsetzung: a) EA, b) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen ihre Vorstellungen vom Verzehnfachen von Vielfachen von 10 nun auf eine mehrstellige Zahl übertragen und mit dem stellenweisen Rechnen verknüpfen. Dabei vertiefen sie ihre Vorstellungen vom Verzehnfachen durch den Darstellungswechsel, der unbedingt verbalisiert werden sollte.

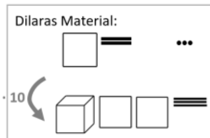
Hier ist die zu verzehnfachende Zahl in ihre Stellenwerte zerlegt und diese werden einzeln mit zehn multipliziert. So können die Lernenden ihr Wissen (aus den vorherigen Aufgaben), was mit den einzelnen Stellenwerten beim Verzehnfachen passiert, für eine Zahl anwenden, deren Stellenwerte größer 0 sind.
Wichtig bleibt die Versprachlichung. Die Lernenden sollen ihre Rechenwege immer wieder erklären.

Die Vernetzung der Darstellungen könnte so verbalisiert werden:
„Jonas zerlegt die 123 in ihre Stellenwerte und verzehnfacht jeden Stellenwert einzeln, bevor er die Zwischenergebnisse addiert.
Jonas verzehnfacht 100. Das heißt aus einer Hunderterplatte wird ein Tausenderwürfel, weil 10 Hunderterplatten genauso viel sind wie 1 Tausenderwürfel. In der Stellentafel wird die 1 aus der Hunderterspalte in die Tausenderspalte verschoben. Aus 100 werden 1000.
Jonas verzehnfacht 20. Das heißt aus 2 Zehnerstangen werden 2 Hunderterplatten, weil 20 Zehnerstangen genauso viel sind wie 2 Hunderterplatten. In der Stellentafel wird die 2 aus der Zehnerspalte in die Hunderterspalte verschoben. Aus 20 werden 200.
Jonas verzehnfacht 3. Das heißt aus 3 Einerwürfeln werden 3 Zehnerstangen, weil 30 Einerwürfel genauso viel sind wie 3 Zehnerstangen. In der Stellentafel wird die 3 aus der Einerspalte in die Zehnerspalte verschoben. Es gibt dann 0 Einer. Aus 3 werden 30."

1.4 Mit 10 multiplizieren auf verschiedenen Wegen

a) Dilara, Maurice und Jonas rechnen die Aufgabe **123 · 10**.
Erkläre, wie die Kinder vorgehen.
Wie findest du die Rechnung von Jonas bei Dilara wieder, wie bei Maurice?

Dilaras Material:



Maurices Stellentafel: (· 10)

T	H	Z	E
	1	2	3
1	2	3	0

Jonas' Rechnung:

$$\begin{array}{rl} 100 & \cdot 10 \\ + \quad 20 & \cdot 10 \\ + \quad 3 & \cdot 10 \\ \hline 123 & \cdot 10 \end{array} = \begin{array}{r} 1000 \\ + \quad 200 \\ + \quad 30 \\ \hline 1\,230 \end{array}$$

b) Löse die vier Aufgaben wie Maurice, Dilara oder Jonas. Erkläre die Rechenwege.

(1) 35 · 10 = 350
(2) 137 · 10 = 1370
(3) 213 · 10 = 2130
(4) 243 · 10 = 2430

2 Dividieren durch 10 verstehen

2.1 **Erarbeiten**

Ziel: Division durch zehn als Umkehrung der Multiplikation mit zehn verstehen

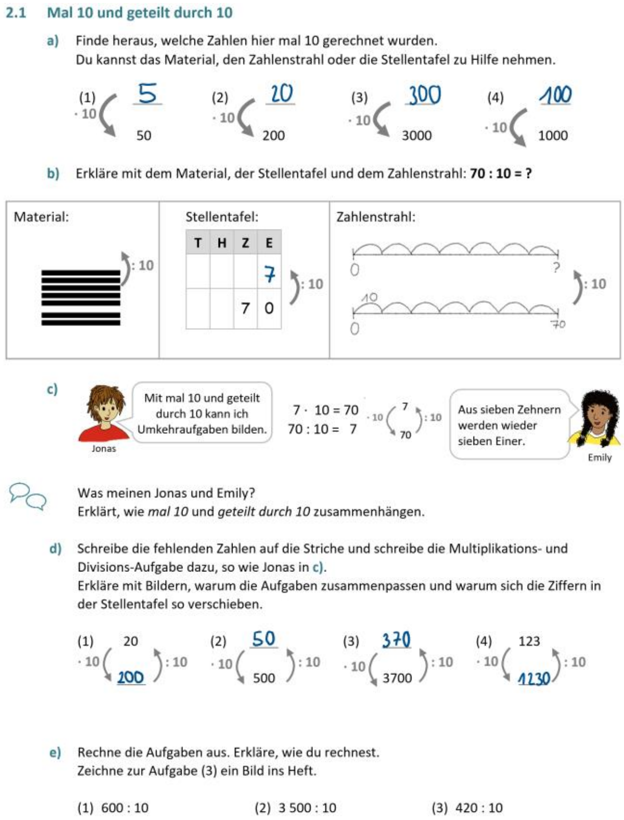
Material: -

Umsetzung: a), b) EA, c) UG, d), e) EA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Division durch zehn als Umkehrung der Multiplikation mit zehn verstehen (Multiplikation und Division in Verbindung zueinander zu sehen, kann mithilfe des Baustein **N4 B** wiederholt werden.).
Auch bei der Division ist es wichtig, dass die Lernenden eine tragfähige Vorstellung aufbauen und die Division durch 10 nicht rezeptartig als Wegstreichen einer Null vollziehen.
Allgemein sollen sie verstehen, dass beim Dividieren durch 10 z.B. aus 7 Zehnern, 7 Einer werden.

- Am Material heißt das: Aus 7 Zehnerstangen werden 7 Einerwürfel.
- In der Stellentafel heißt das: Die 7 aus der Zehnerspalte wird (nach rechts) in die Einerspalte verschoben.
- Am Zahlenstrahl heißt das: Aus 7 Zehnerschritten werden 7 Einerschritte.

Um nachzuvollziehen, warum beim Dividieren durch 10 aus 7 Zehnerstangen 7 Einerwürfel werden, kann es sinnvoll sein, dass die Lernenden z.B. für die Division von 7 Zehnerstangen durch 10 diese in 70 Einerwürfel entbündeln und diese dann zu 10 gleich großen Gruppen umstrukturieren. Dann ist die Frage: Wie viele sind in einer Gruppe? Eine Gruppe besteht dann aus 7 Einerwürfeln. Aus 7 Zehnerstangen werden somit 7 Einerwürfel, weil in 7 Zehner 70 Einer passen. Das Bündeln mit dem Würfelmaterial eignet sich besonders gut, um beim Dividieren durch 10 zu veranschaulichen, dass sich der nächstkleinere Stellenwert immer aus 10 des nächstgrößeren Stellenwertes zusammensetzt.



2.1 Mal 10 und geteilt durch 10

a) Finde heraus, welche Zahlen hier mal 10 gerechnet wurden.
Du kannst das Material, den Zahlenstrahl oder die Stellentafel zu Hilfe nehmen.

(1) · 10: 5 → 50 (2) · 10: 20 → 200 (3) · 10: 300 → 3000 (4) · 10: 100 → 1000

b) Erkläre mit dem Material, der Stellentafel und dem Zahlenstrahl: **70 : 10 = ?**

Material: : 10

Stellentafel:

T	H	Z	E
			7
		7	0

: 10

Zahlenstrahl: 0 ? ; 10 ; 0 70 ; : 10

c) Jonas: Mit mal 10 und geteilt durch 10 kann ich Umkehraufgaben bilden.

7 · 10 = 70
70 : 10 = 7

Emily: Aus sieben Zehnern werden wieder sieben Einer.

Was meinen Jonas und Emily?
Erklärt, wie *mal 10* und *geteilt durch 10* zusammenhängen.

d) Schreibe die fehlenden Zahlen auf die Striche und schreibe die Multiplikations- und Divisions-Aufgabe dazu, so wie Jonas in c).
Erkläre mit Bildern, warum die Aufgaben zusammenpassen und warum sich die Ziffern in der Stellentafel so verschieben.

(1) 20 · 10 200 : 10 (2) 50 · 10 500 : 10 (3) 370 · 10 3700 : 10 (4) 123 · 10 1230 : 10

e) Rechne die Aufgaben aus. Erkläre, wie du rechnest.
Zeichne zur Aufgabe (3) ein Bild ins Heft.

(1) 600 : 10 (2) 3 500 : 10 (3) 420 : 10

3 Mit 100 und 1 000 multiplizieren und dividieren

3.1 **Erarbeiten**

Ziel: Einer und Zehner mit 100 und 1000 multiplizieren und Tausender durch 100 und 1000 dividieren

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG, b, c) UG, d), e) EA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Bedeutung der Multiplikation und Division mit 100 und 1000 erarbeiten. Das knüpft an die Vorstellungen an, die die Lernenden in den vorherigen Aufgaben aufgebaut haben.
Hier besteht die besondere Herausforderung darin, dass zweimal verändert wird.

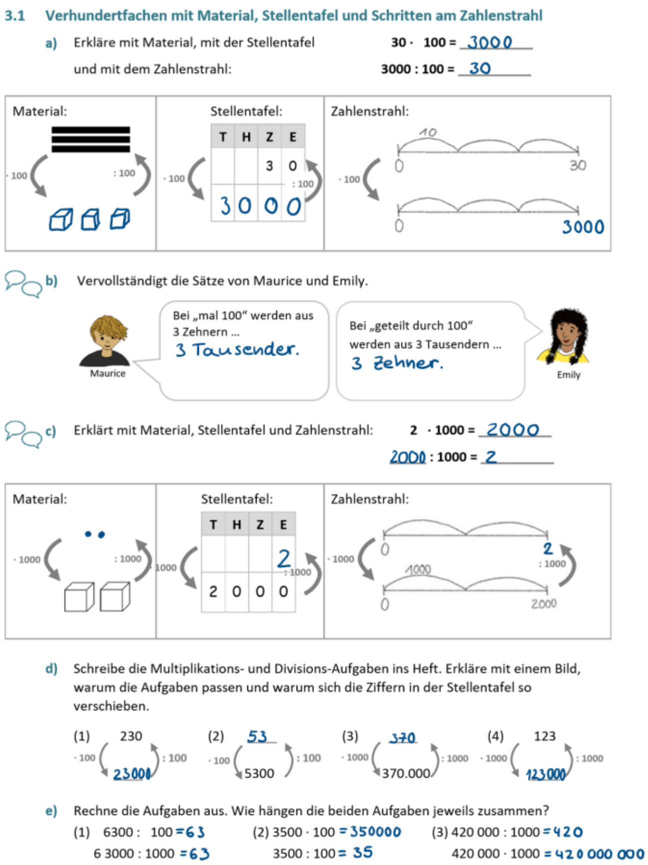
- Am Material heißt das: Beim Multiplizieren, bzw. Dividieren mit 100 werden aus 3 Zehnerstangen 3 Tausenderwürfel und andersherum.
- In der Stellentafel heißt das: Beim Multiplizieren, bzw. Dividieren mit 100 wird die 3 aus der Zehnerspalte in die Tausenderspalte verschoben und andersherum.
- Am Zahlenstrahl heißt das: Beim Multiplizieren, bzw. Dividieren mit 100 werden aus 3 Zehnerschritte 7 Tausenderschritte und andersherum.

Impulse:

- Wo siehst du mal 100 in der Stellentafel / am Material / am Zahlenstrahl?
- Warum wird hier die 3 um zwei Spalten verschoben?
- Warum müssen wir die 3 in die Tausenderspalte eintragen, obwohl wir mit 100 multiplizieren?

Impulse: zu e (1)

- Warum kommt bei beiden Aufgaben das gleiche Ergebnis heraus, obwohl es unterschiedliche Aufgaben sind? Erkläre mit der Stellentafel.


3.1 Verhundertfachen mit Material, Stellentafel und Schritten am Zahlenstrahl

a) Erkläre mit Material, mit der Stellentafel und mit dem Zahlenstrahl: 30 · 100 = 3000; 3000 : 100 = 30

b) Vervollständigt die Sätze von Maurice und Emily.

c) Erklärt mit Material, Stellentafel und Zahlenstrahl: 2 · 1000 = 2000; 2000 : 1000 = 2

d) Schreibe die Multiplikations- und Divisions-Aufgaben ins Heft. Erkläre mit einem Bild, warum die Aufgaben passen und warum sich die Ziffern in der Stellentafel so verschieben.

e) Rechne die Aufgaben aus. Wie hängen die beiden Aufgaben jeweils zusammen?

(1) 6300 : 100 = 63; 6 3000 : 1000 = 63
(2) 3500 · 100 = 350000; 3500 : 100 = 35
(3) 420 000 : 1000 = 420; 420 000 · 1000 = 420 000 000

4 Mit Vielfachen von 10 multiplizieren und dividieren

4.1 – 4.2 **Erarbeiten und Üben**

Ziel: Multiplizieren und dividieren mit beliebigen Vielfachen von Zehnerpotenzen

Material: -

Umsetzung: 4.1 a) EA, b), c), d) UG, 4.2 a) – d) EA, e) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen 2 Strategien erarbeiten, um Aufgaben mit Vielfachen von Zehnerpotenzen geschickt zu bearbeiten. Beide Strategien greifen auf die Verzehnfachung aus den vorherigen Aufgaben zurück.

Kenan beschreibt die Zahl 60 als 6 Zehnerstangen. Hier lohnt sich auch die Thematisierung des Bündelns, um das Ergebnis nicht abzählen zu müssen.

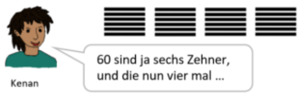
Bei Leonie sind zwei Perspektiven möglich:
1) Bei Leonie wird Mal 10 und Geteilt durch 10 aufgegriffen. Die Zahl 60 wird durch 10 dividiert, also werden aus 6 Zehnern 6 Einer. Ich kann erst mal 6 und dann mal 10 rechnen, weil 60 aus 6 Zehnern besteht.
2) Leonies Rechenweg stellt das schrittweise Rechnen dar. Sie zerlegt durch Multiplikation und wendet dabei das Assoziativgesetz an. Dies muss mit den Lernenden nicht explizit thematisiert werden.

4.1 Wie rechnest du?

a) Rechne die Aufgabe **4 · 60**. Schreibe deinen Rechenweg auf.

b) Vergleicht eure Rechenwege.
Erklärt mit Material oder am Zahlenstrahl, warum man so rechnen darf.

c) So rechnen Kenan und Leonie. Erklärt ihre Rechenwege.



Kenan

4 · 60 = 240
4 · 6 = 24
24 · 10 = 240


Leonie

d) Rechne die Aufgaben aus. Notiere deine Rechenschritte.

(1) 5 · 50 = 250 (2) 3 · 20 = 60 (3) 50 · 40 = 2000
(4) 700 · 80 = 56000 (5) 60 · 400 = 24000 (6) 500 · 400 = 200000

Erklärt, wie ihr bei Aufgabe (2) und (3) vorgeht. Nutzt dazu die Sprechweise von Kenan.

Hintergrund:
Die Lernenden sollen bei der Bearbeitung der Aufgabenpaare Leonies oder Kenans Strategie nutzen. Für die Division gibt es bei Leonies Strategie dann die Besonderheit, dass die Aufgabe auch multiplikativ gelöst wird:
<u>240 : 6 = 40</u>
24 : 6 = 4
4 · 10 = 40

In Aufgabenteil e) sollen die Lernenden mit der Lehrkraft feststellen, dass man Vielfache von zehn durch Multiplikation so zerlegen kann, dass die Verzehnfachung / Verhundertfachung / Vertausendfachung eine Teilaufgabe bildet, die man sich gut vorstellen kann.

Impuls:
- Wie hilft dir die Aufgabe 240 : 6 für die Aufgabe 2400 : 6?

Methode:
In Aufgabenteil 4.2 c) thematisieren, wie sie die Zusammenhänge zwischen den Aufgaben nutzen.

In Aufgabenteil e) ggf. klären, was „Vielfache von 10" sind.

4.2 Aufgaben-Paare

a) Löse die Aufgaben-Paare, nutze für die untere Aufgabe die obere.

(1) 3 · 20 = 60	(2) 7 · 40 = 280	(3) 5 · 400 = 2000
3 · 200 = 600	7 · 400 = 2800	5 · 4000 = 20000

b) Ergänze die Aufgaben zu einem Aufgabenpaar und löse sie.

(1) 5 · 60 = 300	(2) 6 · 70 = 420	(3) 7 · 80 = 560
5 · 600 = 3000	6 · 700 = 4200	7 · 800 = 5600

c) Löse die Aufgaben. Nutze dazu die Zusammenhänge der Aufgaben-Paare.

(1) 240 : 6 = 40	(2) 720 : 8 = 90	(3) 180 : 6 = 30
2400 : 6 = 400	7200 : 8 = 900	1800 : 6 = 300
2400 : 60 = 40	7200 : 80 = 90	1800 : 60 = 30
2400 : 600 = 4	7200 : 800 = 9	1800 : 600 = 3

d) Mache Aufgaben-Päckchen wie in Aufgabe c) mit diesen Geteilt-Aufgaben.
Zeichne zu (2) auch ein Bild von Material oder Zahlenstrahl dazu.

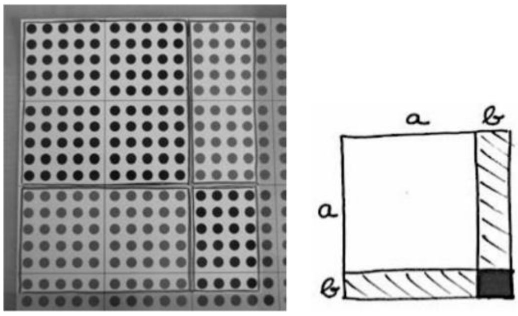
(1) 21 : 7 = 3 (2) 8 : 2 = 4 (3) 45 : 9 = 5

e) Fasst noch einmal zusammen: Warum kann man Vielfache von 10 wie 240, 2400, 7200 leichter multiplizieren und dividieren als andere Zahlen? Was stellt ihr euch dazu vor?

N6B Multiplizieren und Rechenwege erklären – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Während vor einigen Jahrzehnten verständiges Rechnen häufig noch als Vorstufe zu den schriftlichen Algorithmen angesehen wurde, besitzt es heute seinen eigenen festen Platz als zentrale Rechenmethode im Mathematikunterricht. Im Gegensatz zum Algorithmus wird beim verständigen Rechnen mit Zahlen statt nur mit einzelnen Ziffern gerechnet. Dies macht die Rechenstrategien nicht nur flexibel anwendbar, sondern ermöglicht gleichzeitig auch Einsichten in Rechengesetze und fördert die Zahlvorstellung. Diese Erkenntnisse bilden eine wichtige Grundlage für das Rechnen in anderen Zahlbereichen sowie für die Algebra. Zu verstehen, wie sich die Teilprodukte bei der Aufgabe 16 · 14 zusammensetzen, wenn beide Faktoren in ihre Stellenwerte zerlegt werden, lässt anhand dieses Rechenwegs Einsichten in das zugrunde liegende Distributivgesetz gewinnen. Dies bildet beispielsweise die Basis für das Verständnis einer geometrischen Veranschaulichung der binomischen Formeln.



Zerlegung der Produkte 16 · 14 und $(a + b)^2$
$16 \cdot 14 = (10 + 6) \cdot (10 + 4) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

In diesem Baustein werden die Lernenden an die verständigen Multiplikations-Strategien *Stellenweises Rechnen, Schrittweises Rechnen* und *Hilfsaufgabe* herangeführt. Ausgangsbasis ist dabei das Arbeiten mit dem Punktefeld, um eine inhaltliche Verständnisgrundlage zu erarbeiten. Die Lernenden entwickeln durch ihre Handlungen am Material eigene Rechenwege und begründen diese. Daran anschließend folgt die Ablösung vom Material und die Hinführung zur Verwendung des Malkreuzes.

Strategien der verständigen Multiplikation

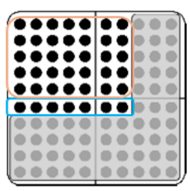
Beim *Stellenweisen Rechnen* werden beide Faktoren in ihre Stellenwerte zerlegt. Das Malkreuz hilft, die Teilprodukte zu strukturieren, um keine Stellenkombinationen zu vergessen. Für Produkte aus zweistelligen Faktoren wird ein 2·2-Malkreuz (siehe Abbildung) verwendet. Dabei werden beide Faktoren stellenweise zerlegt (19 = 10 + 9 und 14 = 10 + 4). Dabei ist die festgelegte Konvention in diesem Material, dass die Zerlegung des ersten Faktors in die linke Spalte, die des zweiten Faktors in die obere Zeile des Malkreuzes eingetragen wird. Diese Reihenfolge ist für eine Anschlussfähigkeit nach unten, der Entwicklung aus den Punktefeldern, und nach oben, dem Vergleich mit dem schriftlichen Algorithmus, wichtig. Im Malkreuz wird mit Zahlen gerechnet, das heißt, es werden nicht die Ziffern der Stellenwerte 1 (Zehner) und 4 (Einer) eingetragen, sondern die Zahlen 10 und 4. Die Summen der Teilprodukte werden am unteren oder rechten Rand notiert und das Gesamtergebnis wird im unteren rechten Feld aufgeschrieben. Für größere Aufgaben ist das Malkreuz nach unten oder nach rechts um beliebig viele Spalten und Zeilen erweiterbar.

·	10	4	
10	100	40	140
9	90	36	+ 126
	190	+76	266

Stellenweise Multiplikation mit dem Malkreuz

Beim *Schrittweisen Rechnen* wird nur ein Faktor (entweder der erste oder der zweite) in seine Stellen zerlegt und mit dem gesamten anderen Faktor multipliziert. Durch farbliche Markierungen der Gruppen am Punktefeld kann das Hineinsehen der Zerlegungsstruktur in das Punktefeld unterstützt werden. Die Veranschaulichung am Punktefeld hilft, unterschiedliche Zerlegungen zu visualisieren und zu verstehen, warum Teilprodukte addiert werden. Dadurch machen die Lernenden erste Erfahrungen mit dem Distributivgesetz.
Zudem wird die „Gleichheit" der Terme, bzw. der zerlegten Aufgabe deutlich. In der Fördereinheit wird die Rechnung als Termschreibweise (bzw. „Rechenkette" als Begriff für die Lernenden) notiert.

$$
\begin{aligned}
& 6 \cdot 7 \\
= \; & 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \\
= \; & 35 + 7 \\
= \; & 42
\end{aligned}
$$



Rechenkette zur schrittweisen Zerlegung und dazugehörige Veranschaulichung am Punktefeld

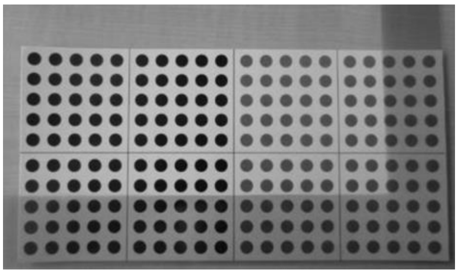
Bei der Verwendung der Strategie *Hilfsaufgabe* wird ein Faktor so erhöht oder verringert, dass sich eine leichter zu berechnende Multiplikation ergibt. Anschließend ist die Differenz zwischen der gewählten Hilfsaufgabe und der ursprünglich zu lösenden Aufgabe zu berücksichtigen. Dabei kann gut auf die Denkweise in Gruppen eingegangen werden, die bei der Multiplikation so wichtig ist. Das Erhöhen des Faktors um 1 bedeutet nicht, dass man -1 rechnet, sondern, dass man das ganze entsprechende Bündel subtrahieren muss.

Veranschaulichung und Material

Punktefeld

Auf abwischbaren Punktefeldern lassen sich mit farbigen Folienstiften verschiedene Rechenwege einzeichnen und vergleichen. Mit Hilfe des Malwinkels wird zunächst die Aufgabe gelegt, wobei die transparente Folie die Punkte abdeckt, die nicht zum Punktefeld der entsprechenden Aufgabe gehören, diese gleichzeitig aber noch sichtbar lässt. Dies ermöglicht es den Lernenden, bei Hilfsaufgaben zu kontrollieren, wie viele Punkte durch eine Verschiebung des Malwinkels wegfallen oder hinzukommen.

Mit farbigen Stiften lässt sich das Punktefeld dann entsprechend der Rechnungen der Lernenden in mehrere Felder zerlegen, die zur Berechnung der gelegten Aufgabe herangezogen werden. Wichtig ist hier eine Anknüpfung an die Rechenwege der Lernenden, die nicht vorschnell auf die intendierten Unterteilungen des Punktefelds geführt werden sollten. Teilen Lernende das Punktefeld in viele kleine Felder ein oder bestimmen in diesen die Punkte zählend, sollten diese Strategien aufgegriffen und gemeinsam weiterentwickelt werden.



200er-Punktefeld mit großem Malwinkel

Zur Vereinfachung der Kommunikation über verschiedene Strategien sollte gemeinsam mit den Lernenden festgelegt werden, dass der 1. Faktor die Anzahl der horizontalen Reihen, der 2. Faktor die Anzahl der vertikalen Reihen angibt. Bei der Einführung des Materials ist darauf zu achten, ob die Lernenden einen sicheren Umgang mit flächigen Darstellungen der Multiplikation aufweisen und Multiplikationsaufgaben sicher gelegt und interpretiert werden können (Baustein **N4 A**). Für einen flexiblen Umgang mit dem Material, der nicht auf zählende Strategien zurückgreift, ist gezielt auf die Fünfer- und die Zehnerstruktur der Felder hinzuweisen. Während der Förderung werden die Lernenden ermutigt, diese Strukturen zu nutzen.

Aufbau der Förderung

Die Förderung besteht aus zwei Fördereinheiten:

1. Multiplizieren mit Zerlegen
2. Multiplizieren mit doppeltem Zerlegen und Malkreuz

Für Lernende mit Unsicherheiten im Einmaleins beginnt der Baustein in Fördereinheit 1 mit der Multiplikation mit Zerlegungen am 100er-Punktefeld. Im Zahlenraum bis Hundert werden die Lernenden an die Arbeit mit dem Punktefeld herangeführt. Die Erarbeitung eines Verständnisses der Strategie *Hilfsaufgabe* steht zudem im Fokus der Fördereinheit.

In Fördereinheit 2 wird das *Stellenweise Rechnen* am 400er-Punktefeld und am Malkreuz erarbeitet und produktiv geübt.

Weiterführende Literatur

KIRA (o.J.). *Halbschriftliche Multiplikation*. https://kira.dzlm.de/arithmetik/halbschriftliches-rechnen/halbschriftliche-multiplikation

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2008). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Spektrum.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). *Das Zahlenbuch 3*. Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007). *Blitzrechenoffensive! Anregungen für eine intensive Förderung mathematischer Basiskompetenzen*. Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 2*. Klett.

N6B Was können wir diagnostizieren?

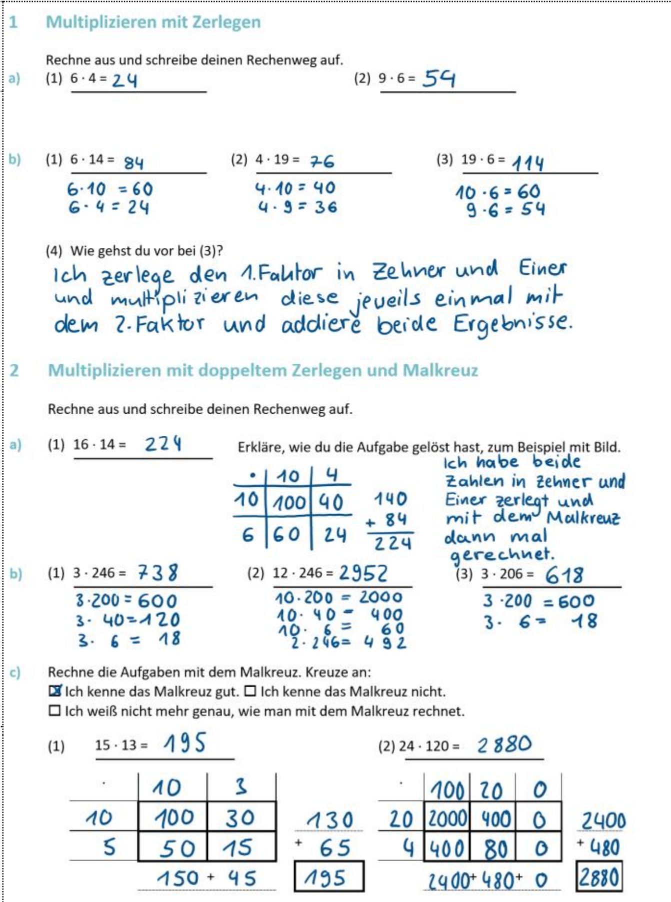
Dauer: 30 - 45 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Bei Schwierigkeiten mit der Notation des Rechenwegs kann es helfen, die Lernenden aufzufordern, ihren Rechenweg / ihre Kopfrechnung mündlich zu erläutern und sie dann anschließend zu bitten, das mündlich Beschriebene aufzuschreiben.
Bei der Durchführung (wenn möglich) auf zählende Rechner achten, insbesondere bei Aufgabe 1.

Vor der Durchführung sollte den Lernenden erklärt werden, dass sie nicht schriftlich multiplizieren sollen. Falls den Lernenden die Begrifflichkeiten nicht klar sind, kann der schriftliche Algorithmus für eine beliebige (nicht im Dokument) enthaltene Aufgabe an die Tafel geschrieben werden und anschließend darauf verwiesen werden, dass dieses Verfahren nicht genutzt werden soll.

2 c): Falls den Kindern das Malkreuz nicht bekannt ist, reicht es, wenn die Lernenden dies mit dem entsprechenden Kreuz vermerken. Die Aufgaben sollten dann nicht verpflichtend sein.



1 Multiplizieren mit Zerlegen

Rechne aus und schreibe deinen Rechenweg auf.

a) (1) $6 \cdot 4 = 24$ (2) $9 \cdot 6 = 54$

b) (1) $6 \cdot 14 = 84$ (2) $4 \cdot 19 = 76$ (3) $19 \cdot 6 = 114$

$6 \cdot 10 = 60$; $6 \cdot 4 = 24$ — $4 \cdot 10 = 40$; $4 \cdot 9 = 36$ — $10 \cdot 6 = 60$; $9 \cdot 6 = 54$

(4) Wie gehst du vor bei (3)?

Ich zerlege den 1.Faktor in Zehner und Einer und multiplizieren diese jeweils einmal mit dem 2.Faktor und addiere beide Ergebnisse.

2 Multiplizieren mit doppeltem Zerlegen und Malkreuz

Rechne aus und schreibe deinen Rechenweg auf.

a) (1) $16 \cdot 14 = 224$ Erkläre, wie du die Aufgabe gelöst hast, zum Beispiel mit Bild.

·	10	4
10	100	40
6	60	24

140 + 84 = 224

Ich habe beide Zahlen in Zehner und Einer zerlegt und mit dem Malkreuz dann mal gerechnet.

b) (1) $3 \cdot 246 = 738$: $3 \cdot 200 = 600$; $3 \cdot 40 = 120$; $3 \cdot 6 = 18$

(2) $12 \cdot 246 = 2952$: $10 \cdot 200 = 2000$; $10 \cdot 40 = 400$; $10 \cdot 6 = 60$; $2 \cdot 246 = 492$

(3) $3 \cdot 206 = 618$: $3 \cdot 200 = 600$; $3 \cdot 6 = 18$

c) Rechne die Aufgaben mit dem Malkreuz. Kreuze an:
☒ Ich kenne das Malkreuz gut. ☐ Ich kenne das Malkreuz nicht.
☐ Ich weiß nicht mehr genau, wie man mit dem Malkreuz rechnet.

(1) $15 \cdot 13 = 195$

·	10	3
10	100	30
5	50	15
	150 +	45

130 + 65 = $\boxed{195}$

(2) $24 \cdot 120 = 2880$

·	100	20	0
20	2000	400	0
4	400	80	0
	2400 +	480 +	0

2400 + 480 = $\boxed{2880}$

Hinweise zur Auswertung

Diagnoseaufgabe 1

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a)	Ergebnis falsch, ohne nachvollziehbaren Rechenweg	Evtl. Flüchtigkeitsfehler, evtl. Schwierigkeiten beim kleinen Einmaleins	An 1.1 – 1.2 Vorstellung zur Multiplikation am Punktefeld aufbauen.
b)	Es fehlen Teilprodukte der stellenweisen Zerlegung	Evtl. unvollständiges Verständnis der Rechenstrategie *stellenweise Rechnen*	An 2.1 – 2.4 Multiplikation mit Faktoren größer 10 am Punktefeld erarbeiten und üben. Dabei die Stellenwerte und die Zusammensetzung von Teilprodukten bei der Zerlegung fokussieren.
	Teilprodukte dem falschen Stellenwert zugeordnet, z.B. 6·14=30 da 6·1=6 und 6·4=24 gerechnet ODER Teilprodukte dem falschen Stellenwert zugeordnet & Stellenkombinationen vernachlässigt, z.B. 6·14=6, da 6·1=6 gerechnet wurde		
	In einigen Stellen Überträge nicht verrechnet	Evtl. Flüchtigkeitsfehler, evtl. unvollständiges Verständnis der Rechenstrategie *stellenweise Rechnen*	

Diagnoseaufgabe 2

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a)	Nur gleiche Stellenwerte miteinander multipliziert	Evtl. unvollständiges Verständnis der Rechenstrategie *stellenweise Rechnen*	An 2.1 – 2.9 distributiven Zerlegung von Punktefeldern erarbeiten und üben.
c)	Rechnung mit Ziffern statt Zahlen und Übertrag im falschen Stellenwert, z.B. 15·13=60, da 15·10= 50 mit Übertrag 1; 15·3=5 mit Übertrag 4; die beiden Überträge werden zu den Einern addiert	Evtl. unvollständiges Verständnis der Rechenstrategie *stellenweise Rechnen*, evtl. Bedeutung der Stellenwerte unklar	An 2.1 – 2.9 die stellenweise Zerlegung mithilfe des Punktefeldes und des Malkreuzes erarbeiten und üben.
	Rechnung mit Ziffern statt Zahlen und alle Teilprodukte als Einer: 15·13=24, da 1·1=1; 1·3=3; 1·5=5; 3·5=15 gerechnet wurde		

N6B Wie können wir fördern, sicher zu multiplizieren und Rechenwege zu erklären

1 Multiplizieren mit Zerlegen

1.1 **Erarbeiten**

Ziel: Rechenwege zur Lösung von Einmaleins-Aufgaben erarbeiten

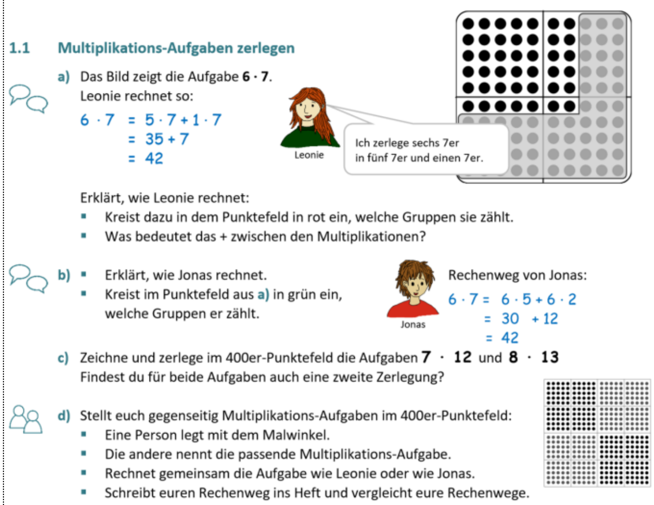
Material: Hunderterpunktefeld, kleiner Malwinkel, Folienstift

Umsetzung: a), b) UG, c) EA und d) PA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen mithilfe des (Hunderter-)Punktefeldes erarbeiten, dass sich Multiplikationsaufgaben verschieden zerlegen lassen. Da sich das Feld auf verschiedene Weisen zerlegen lässt, ergeben sich verschiedene Rechenwege. (Verdeutlichung der flexiblen Rechenwege im Gegensatz zu festen Algorithmen.) Durch das farbliche Markieren der Gruppen soll das Hineinsehen der Zerlegungsstruktur in das Punktefeld unterstützt werden. Der Zerlegung liegt das Distributivgesetz zugrunde, dieser Begriff muss aber für die Kindern nicht wörtlich benannt werden. Jedoch sollte durch die Darstellungsvernetzung die Struktur thematisiert werden.
Die Notation der Rechnung als Rechenkette ist für die Lernenden vermutlich neu, zeigt aber gut, was eigentlich passiert:
„Ich rechne 6 · 7. Dafür zerlege ich sechs 7er in fünf 7er und einen 7er. Sechs 7er sind also das Gleiche wie fünf 7er plus ein 7er. Jetzt kann ich 5 · 7 und 1 · 7 rechnen, das sind 35 und 7.“

Einführung des (Hunderter-)Punktefelds, falls noch nicht aus Baustein **N4 A** oder **N4 B** bekannt. Dabei insbesondere auf Fünfer- und Zehnerstruktur hinweisen, um Abzählen der Punkte zu vermeiden.

Impulse:
- Warum kannst du die Aufgabe so wie Leonie und Jonas bearbeiten? Erkläre mit dem Punktefeld.
- Wie würde Jonas seine Aufgabe erklären, wenn er wie Leonie spricht?



1.1 Multiplikations-Aufgaben zerlegen

a) Das Bild zeigt die Aufgabe **6 · 7**.
Leonie rechnet so:
$6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7$
$= 35 + 7$
$= 42$

Erklärt, wie Leonie rechnet:
- Kreist dazu in dem Punktefeld in rot ein, welche Gruppen sie zählt.
- Was bedeutet das + zwischen den Multiplikationen?

b)
- Erklärt, wie Jonas rechnet.
- Kreist im Punktefeld aus a) in grün ein, welche Gruppen er zählt.

Rechenweg von Jonas:
$6 \cdot 7 = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$
$= 30 + 12$
$= 42$

c) Zeichne und zerlege im 400er-Punktefeld die Aufgaben **7 · 12** und **8 · 13**
Findest du für beide Aufgaben auch eine zweite Zerlegung?

d) Stellt euch gegenseitig Multiplikations-Aufgaben im 400er-Punktefeld:
- Eine Person legt mit dem Malwinkel.
- Die andere nennt die passende Multiplikations-Aufgabe.
- Rechnet gemeinsam die Aufgabe wie Leonie oder wie Jonas.
- Schreibt euren Rechenweg ins Heft und vergleicht eure Rechenwege.

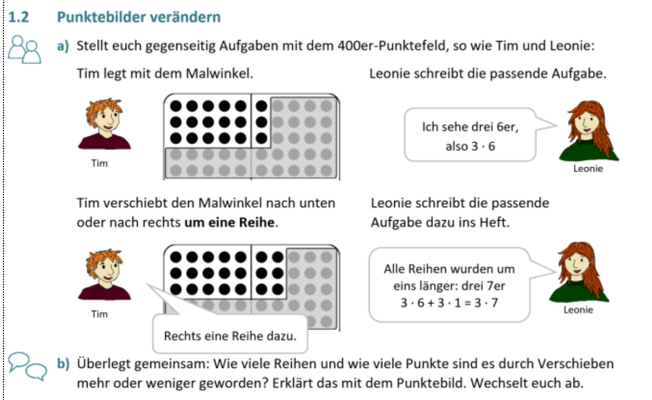
1.2 **Üben**

Ziel: Operative Veränderungen von Multiplikations-Aufgaben verstehen

Material: Hunderterpunktefeld, kleiner Malwinkel, Folienstift

Umsetzung: a) PA, b) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen operative Veränderungen als effiziente Nutzung von Beziehungen erkennen und erklären. Dabei sollen sie die Aufgabe nach Verschiebung des Winkels nicht neu berechnen, sondern die operative Veränderung nutzen (hier: es sind 3 Punkte hinzugekommen, also 18 + 3 = 21).


1.2 Punktebilder verändern

a) Stellt euch gegenseitig Aufgaben mit dem 400er-Punktefeld, so wie Tim und Leonie:

Tim legt mit dem Malwinkel.

Leonie schreibt die passende Aufgabe.

Tim verschiebt den Malwinkel nach unten oder nach rechts **um eine Reihe**.

Leonie schreibt die passende Aufgabe dazu ins Heft.

b) Überlegt gemeinsam: Wie viele Reihen und wie viele Punkte sind es durch Verschieben mehr oder weniger geworden? Erklärt das mit dem Punktebild. Wechselt euch ab.

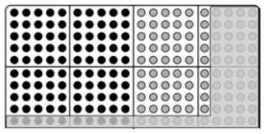
1.3 – 1.4	**Erarbeiten und Üben**
Ziel:	Strategie Hilfsaufgabe erarbeiten; Multiplikationsaufgaben auf verschiedenen Wegen lösen
Material:	200er- und 400er-Hunderterpunktefeld, großer Malwinkel, Folienstift
Umsetzung:	1.3 a) UG, b) EA, 1.4 a) UG, b)-d) EA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Strategie der Hilfsaufgabe mit dem Hunderterpunktefeld erarbeiten. Dabei nutzen sie die bekannten Strukturen des Punktefeldes, um ganze Reihen zu erkennen und zu begründen, warum es nicht reicht, einen 1er zu subtrahieren, sondern einen 16er. Die Lernenden sind häufig unsicher, welchen Faktor sie zur Korrektur der Hilfsaufgabe subtrahieren oder addieren müssen. Daher ist die Visualisierung am Material so wichtig. Dort sieht man gut, dass durch das Verschieben des Malwinkels eine 16er-Reihe hinzukommt, die dann wieder subtrahiert werden muss.

Impulse:
- Was musst du in (5) subtrahieren? Warum?
- Wie muss ich den Malwinkel verschieben, wenn ich in (6) 10 · 10 rechnen möchte? Was muss ich dann beim Rechnen dabei beachten?

1.3 Hilfsaufgaben legen

a) Rico will 9 · 16 rechnen und hat eine gute Idee, aber ist noch nicht zufrieden.



Neun 16er will ich rechnen.
Zehn 16er sind einfach zu rechnen.
Also rechne ich 10 · 16 = 160 und ziehe einen ab.
Aber in meiner Rechnung stimmt was nicht?

Rico schreibt seinen Rechenweg so auf: 9 · 16 = 10 · 16 – 1, oder?
Er denkt, dass etwas in seinem Rechenweg nicht stimmt.
- Könnt ihr ihm erklären, was falsch ist?
- Korrigiert die Rechnung und seine Erklärung.

b) Rechne die Aufgaben wie Rico: Lege erst eine leichte Aufgabe.
Verschiebe dann den Malwinkel.

(1) 5 · 19 (2) 8 · 19 (3) 4 · 19

(4) 9 · 15 (5) 9 · 18 (6) 9 · 11

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Strategie Hilfsaufgabe und das Zerlegen nutzen, um leichte Multiplikationsaufgaben zu finden und ihr Vorgehen (mit dem Punktefeld) erklären.

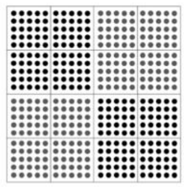
Denksprache:
- „Ich zerlege sechs 18er in sechs 10er und sechs 8er.“
- „Sechs 18er will ich rechnen, sechs 20er sind einfacher. Die sechs 2er-Reihen, die ich zu den sechs 18er-Reihen hinzugefügt habe um sechs 20er-Reihen zu bekommen, muss ich wieder subtrahieren.“ (6 · 18 = 6 · (18 + 2) = 6 · 18 + 6 · 2)

1.4 Multiplizieren mit Zerlegen und Hilfsaufgaben

a) Rechnet und erklärt am Punktefeld, wie ihr die Aufgaben zerlegt und leichte Aufgaben nutzt.

(1) 6 · 18 (2) 7 · 14 (3) 9 · 13
12 · 9 7 · 140 9 · 130

Einige Aufgaben könnt ihr nicht im Material zeigen,
Erklärt, wie die Aufgaben zusammenhängen.



b) Finde für drei der Aufgaben aus **a)** einen zweiten (und vielleicht sogar einen dritten) Rechenweg.

c) Rechne und schreibe deinen Rechenweg ins Heft.
Erkläre, wie du zerlegst, um einfache Aufgaben zu finden.

(1) 8 · 17 (2) 9 · 25 (3) Erkläre: Wie hast du die zweite und dritte Aufgabe in (1) und (2) berechnet?
8 · 170 9 · 250
80 · 17 90 · 25

d) Finde auch für (4) und (5) ähnliche Aufgaben, die du jetzt leicht berechnen kannst.
(4) Neun 26er will ich rechnen, zehn 26er sind einfacher.
(5) Acht 240er will ich rechnen, zehn 240er sind einfacher.

2 Multiplizieren mit doppeltem Zerlegen und Malkreuz

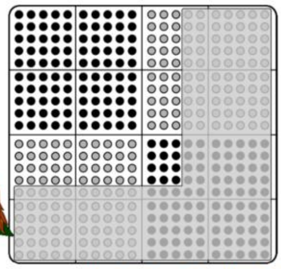
2.1 – 2.2	**Erarbeiten**
Ziel:	Rechenwege zur Lösung von Multiplikationsaufgaben bis 400 erarbeiten
Material:	-
Umsetzung:	2.1 a), b) EA, b), c) UG, d) EA, e) PA, 2.2 a), b) EA, c) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen Rechenwege zur Lösung von Multiplikationsaufgaben bis 400 erarbeiten und dabei erkennen, aus welchen multiplikativen Aufgaben sich die eigentliche Aufgabe zusammensetzt. Zunächst können die Lernenden das Punktefeld individuell zerlegen. Danach ist jedoch das Ziel, dass die Lernenden die Zahlen aus der Aufgabe in ihre Stellenwerte zerlegen und Teilprodukte daraus bilden, die sie am Punktefeld erkennen und miteinander multiplizieren. Am Punktefeld wird gut sichtbar, warum es genau vier Teilprodukte sind.

Impuls:
- Warum reicht es nicht, 10 · 10 und 4 · 3 zu rechnen?

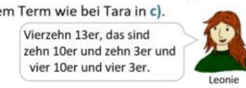
Methode:
Zur besseren Veranschaulichung können die Teilprodukte im Term und im Punktefeld farblich markiert werden.

2.1 Multiplikations-Aufgaben zerlegen



a) Das Bild zeigt die Aufgabe **14 · 13**. Zerlege die Aufgabe in vier kleinere Aufgaben und rechne sie im Heft aus.

b) Zeichne ein, wie Leonie das Bild zerlegt. Addiere ihre vier Multiplikations-Aufgaben in einem Term wie bei Tara in c).



c) Welche Aufgabe hat Tara hier gerechnet?
- Zeigt die Aufgaben in einem Punktefeld mit Malwinkel.
- Wie würde Leonie die vier Multiplikations-Aufgaben aus Taras Term mit Gruppen beschreiben?

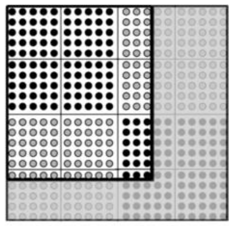
10 · 10 + 10 · 3 + 2 · 10 + 2 · 3

d) Rechne die Aufgaben **16 · 14** und **11 · 19**.
- Zerlege dazu wie Leonie in b) das Punktefeld und beschreibe die Gruppen.
- Schreibe den Term mit vier Teilaufgaben wie Tara in c) auf.
- Wie sieht man das „plus" zwischen den Teilaufgaben im Punktefeld?

e) Stellt euch gegenseitig Aufgaben: Eine Person legt mit dem Malwinkel ein Punktebild. Die andere nennt die passende Aufgabe. Rechnet gemeinsam aus: Zerlegt die Aufgabe in vier kleinere Aufgaben. Schreibt euren Rechenweg so wie Tara in c).

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Zahlen im Malkreuz in Zusammenhang mit den Zerlegungen des Punktebilds bringen. Auch bei der Einführung des Malkreuzes sollte dies immer wieder mit dem Punktefeld vernetzt werden, weil ansonsten die Gefahr besteht, dass das Malkreuz rezeptartig angewendet wird.
Zur besseren Kommunikation über die Malkreuze und in Vorbereitung auf Baustein **N8** kann die Konvention eingeführt werden, dass der erste Faktor die horizontale Reihenanzahl, der zweite Faktor die vertikale Reihenanzahl des Punktefeldes angibt und entsprechend die Eintragung im Malkreuz erfolgt.

2.2 Das Malkreuz



a) Welche Aufgabe zeigt das Bild? Wie würde Leonie sie zerlegen und beschreiben? Schreibe den Term auf wie Tara.

b) Kenan rechnet die Aufgabe im Malkreuz so:

·	10	3	
10	100	30	130
6	60	18	+ 78
	160 +	48	208

c) Vergleiche Kenans Rechnung im Malkreuz mit Leonies Zerlegung im Punktefeld und mit Taras Term. Was ist gleich? Was ist verschieden?

2.3 – 2.4 **Üben**

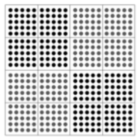
Ziel: Notation im Malkreuz durch Darstellungswechsel üben

Material: -

Umsetzung: 2.3 a), b) EA, 2.4 UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen sowohl die Aufgaben im Punktefeld sehen und im Malkreuz notieren. So werden sie zum Darstellungswechsel angeregt und können ihr Operationsverständnis anhand von zweistelligen Multiplikationsaufgaben festigen.

2.3 Multiplikationen mit Malkreuz und Punktefeld rechnen



a) Lege die Aufgaben **11 · 11** und **15 · 17** mit dem Punktefeld und dem Malwinkel.
Rechne die Aufgaben mit dem Malkreuz aus.

(1) 11 · 11 = 121

·	10	1	
10	100	10	110
1	10	1	+ 11
	110 + 11		$\boxed{121}$

(2) 15 · 17 = 255

·	10	7	
10	100	70	170
5	50	35	+ 85
	150 + 105		$\boxed{255}$

b) Schreibe für beide Aufgaben auch den Term mit vier Multiplikationen auf wie Tara in 2.1.

Hintergrund:
Die Lernenden sollen für einen typischen Fehler sensibilisiert werden und dadurch ihre Einsichten in das stellenweise Multiplizieren mit zweistelligen Zahlen vertiefen. Jonas greift eine typische Schwierigkeit von Lernenden auf. Am Punktefeld und am Malkreuz wird deutlich, warum es genau vier Teilprodukte sein müssen.

2.4 Fehler in Rechenwegen erklären

Jonas rechnet die Aufgabe **16 · 15** so:

Vielleicht so?
16 · 15 = 10 · 10 + 6 · 5 + 10·6 + 10·5

- Legt die Aufgabe mit dem Malwinkel und rechnet sie im Heft aus.
- Erklärt mit Material oder dem Malkreuz, warum Jonas Rechnung **nicht** richtig ist.
- Ergänzt die Aufgabe so, dass sie richtig ist.

2.5 – 2.6 **Üben**

Ziel: Multiplikation mit dem Malkreuz produktiv üben; Beziehungen zwischen Aufgaben erkennen

Material: 2.5 EA, 2.6 a) EA, b) UG

Umsetzung: a) PA, b) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Multiplikation mit einem Darstellungsmittel ihrer Wahl produktiv üben und dabei Beziehungen zwischen Aufgaben erkennen. Dabei sollen sie auf die erarbeiteten Strategien zurückgreifen.

Impulse:

- Wie müsste ein Punktefeld aussehen, mit dem man diese Multiplikationsaufgabe darstellen kann?
- Warum hast du die Multiplikationsaufgabe mit dieser Strategie gelöst?
- Warum verändert sich das Ergebnis in (1) immer um 150?

2.5 Rechenwege bei Multiplikations-Aufgaben

Entscheide selbst, ob du wie Leonie in 2.1 mit Punktefeld, wie Kenan in 2.2 mit Malkreuz oder wie Rico in 1.4 mit Hilfsaufgabe rechnest. Schreibe den Rechenweg wie Tara in dein Heft.

(1) 15 · 17 = 255 (2) 19 · 9 = 171 (3) 12 · 12 = 144
(4) 8 · 18 = 144 (5) 19 · 20 = 380 (6) 19 · 19 = 361

2.6 Verwandte Multiplikations-Aufgaben

a) Rechne die Aufgaben.

(1) 12 · 15 = 180
22 · 15 = 330 (+150)
32 · 15 = 480 (+150)
42 · 15 = 630 (+150)

(2) 11 · 12 = 132
12 · 13 = 156 (+24)
13 · 14 = 182 (+24)
14 · 15 = 210 (+24)

b) Wie verändern sich die Aufgaben in a)? Wie verändern sich die Ergebnisse?
Erklärt mit dem mehreren Punktefeldern oder dem Malkreuz, warum sich die Ergebnisse so verändern.

2.7 – 2.9 **Üben**

Ziel: Multiplikation mit dem Malkreuz produktiv üben; Beziehungen zwischen Aufgaben erkennen

Material: KV: Malkreuzvorlagen

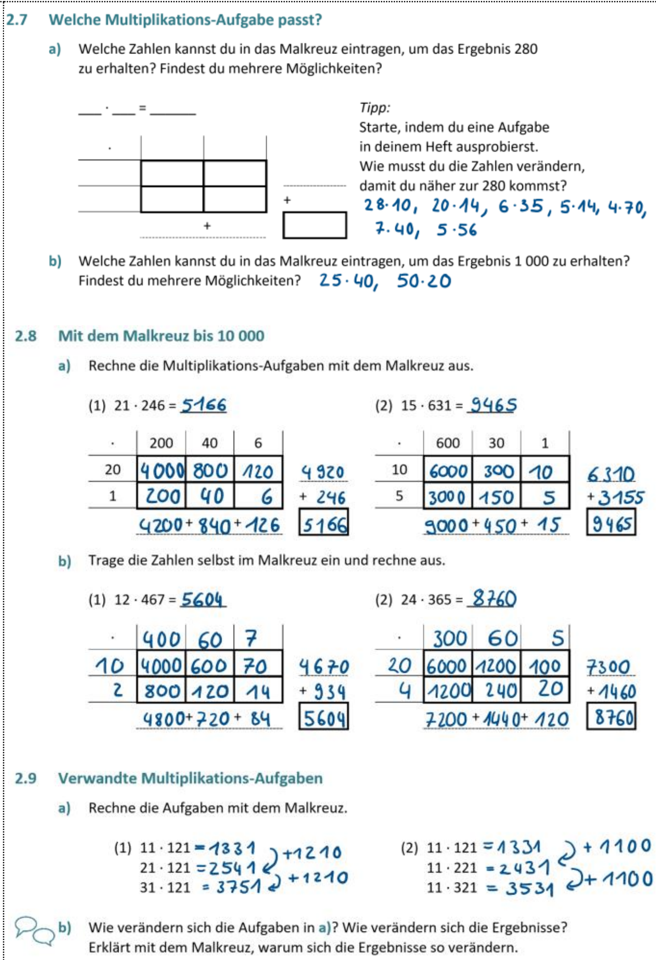
Umsetzung: 2.7 EA und UG; 2.8 a), b) EA, 2.9 a) EA, b) UG

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Multiplikation mit dem Malkreuz produktiv üben. Dabei sollen sie ihre Lösungen systematisch verändern, zum Finden weiterer Lösungen nutzen und ihr erworbenes Wissen und Verständnis von multiplikativen Zusammenhägen auch bei Aufgaben mit einem dreistelligen Faktor anwenden.

Impulse:
- Wie kannst du die Zahlen verändern, um näher an 280 bzw. 1 000 heranzukommen?

Lösung:
Bei 280: 28 · 10, 20 · 14, 6 35, 5 · 14, 4 · 70, 7 · 40, 5 · 56
Bei 1 000: 25 · 40, 50 · 20

Methode:
Zum Ausprobieren Kopiervorlage zum Malkreuz ausreichend zur Verfügung stellen: mathe-sicher-koennen.dzlm.de/nz#n6



2.7 Welche Multiplikations-Aufgabe passt?

a) Welche Zahlen kannst du in das Malkreuz eintragen, um das Ergebnis 280 zu erhalten? Findest du mehrere Möglichkeiten?

___ · ___ = ______

Tipp: Starte, indem du eine Aufgabe in deinem Heft ausprobierst. Wie musst du die Zahlen verändern, damit du näher zur 280 kommst?

28·10, 20·14, 6·35, 5·14, 4·70, 7·40, 5·56

b) Welche Zahlen kannst du in das Malkreuz eintragen, um das Ergebnis 1 000 zu erhalten? Findest du mehrere Möglichkeiten? 25·40, 50·20

2.8 Mit dem Malkreuz bis 10 000

a) Rechne die Multiplikations-Aufgaben mit dem Malkreuz aus.

(1) 21 · 246 = 5166

·	200	40	6	
20	4000	800	120	4920
1	200	40	6	+ 246
	4200 +	840 +	126	5166

(2) 15 · 631 = 9465

·	600	30	1	
10	6000	300	10	6310
5	3000	150	5	+ 3155
	9000 +	450 +	15	9465

b) Trage die Zahlen selbst im Malkreuz ein und rechne aus.

(1) 12 · 467 = 5604

·	400	60	7	
10	4000	600	70	4670
2	800	120	14	+ 934
	4800 +	720 +	84	5604

(2) 24 · 365 = 8760

·	300	60	5	
20	6000	1200	100	7300
4	1200	240	20	+ 1460
	7200 +	1440 +	120	8760

2.9 Verwandte Multiplikations-Aufgaben

a) Rechne die Aufgaben mit dem Malkreuz.

(1) 11 · 121 = 1331
21 · 121 = 2541 +1210
31 · 121 = 3751 +1210

(2) 11 · 121 = 1331
11 · 221 = 2431 + 1100
11 · 321 = 3531 + 1100

b) Wie verändern sich die Aufgaben in a)? Wie verändern sich die Ergebnisse? Erklärt mit dem Malkreuz, warum sich die Ergebnisse so verändern.

N6C Sicher dividieren und Rechenwege erklären – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Die zunehmende Bedeutung verständiger Rechenstrategien in der Grundschule hat die ehemalige Dominanz der schriftlichen Algorithmen bei den vier Grundrechenarten in den Hintergrund rücken lassen. Bei keiner anderen Operation jedoch ist dies so stark geschehen, wie bei der Division. So wird das schriftliche Normalverfahren in den Bildungsstandards der Primarstufe nicht mehr als zu erarbeitende Kompetenz aufgeführt und verschwindet nach und nach auch aus den Kern- und Rahmenlehrplänen der Bundesländer. Dies liegt einerseits an der hohen Komplexität des Verfahrens, andererseits aber auch daran, dass es gegenüber der verständigen Division kaum effizienter ist. In diesem Baustein wird die Strategie *Schrittweise dividieren* erarbeitet, welche die Hauptstrategie der verständigen Division darstellt und im Gegensatz zur Strategie *Hilfsaufgabe* bei allen Divisionsaufgaben anwendbar ist. Diese wird als Umkehrung zur Multiplikation erarbeitet und gefestigt. Zudem bereitet diese Strategie das schriftliche Dividieren in Baustein **N8** vor, die jedoch weiterhin an die Zahlzerlegungen gebunden bleibt.

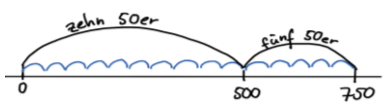
Strategien der verständigen Division

Beim *Schrittweisen Rechnen* wird der Dividend geeignet zerlegt und so schrittweise jeweils durch den Divisor geteilt. Zugrunde liegt diesem Vorgehen das Distributivgesetz, dessen Anwendung die Lernenden bei der Multiplikation in Baustein **N6 B** erarbeitet haben. Die hier benötigte Vorstellung des Denkens in Gruppen wird in Baustein **N4 B** bei der Behandlung des Operationsverständnisses der Division thematisiert. In diesem Baustein entwickeln die Lernenden eigene Zerlegungen des Dividenden, veranschaulichen diese am Zahlenstrahl und erklären ihre Rechenwege.

Veranschaulichung und Material

Zahlenstrahl

Der Zahlenstrahl dient hier als zentrales Anschauungsmittel, in das die Lernenden die multiplikative Struktur hineinsehen sollen, um Divisionsaufgaben zu lösen. Die Zerlegung zeigt sich in der Aufteilung und der Zusammenfassung der einzelnen Schritte. Auf Basis der Zerlegung kann die Addition der Teilergebnisse erklärt werden: „In 50 passen zehn 5er-Schritte. In 25 passen fünf 5er-Schritte. In 75 passen also fünfzehn 5er-Schritte.“



Darstellung der Aufgabe 750 : 50 am Zahlenstrahl

So können die Lernenden selbst auch die Teilschritte visualisieren und dadurch verständig dividieren.

Notation der Rechenwege

In den Fördereinheiten wird auch die Termschreibweise in einfacher Form angebahnt. Die Lernenden schreiben dabei ihre Rechenschritte ausführlich untereinander auf, sodass die Terme jeweils gleichwertig sind.

$$\begin{aligned} & 75 : 5 \\ = \; & 50 : 5 + 25 : 5 \\ = \; & 10 + 5 \\ = \; & 15 \end{aligned}$$

Termschreibweise (bzw. Rechenkette) zur Aufgabe 75 : 5

Zudem spielt die Multiplikation als Umkehrung der Division eine wichtige Rolle und wird immer wieder aufgegriffen. Hier ist es wichtig, dass erarbeitet werden muss, wie genau die Multiplikation dazu beitragen kann, die Divisions-Aufgabe zu lösen. Der Zusammenhang muss im Unterrichtsgespräch expliziert werden.

408 : 4 = 102, denn

$$\begin{aligned} 400 &= 100 \cdot 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Multiplikation als Strategie zum Lösen von Divisions-Aufgaben

Aufbau der Förderung

Die Förderung besteht aus zwei Fördereinheiten:

1. Divisionen zerlegen am Bild: Wie oft passt es hinein?
2. Divisions-Aufgaben mit Multiplikations-Aufgaben

Die Erarbeitung der verständigen Division beginnt in Fördereinheit 1 mit der Veranschaulichung am Zahlenstrahl. In Fördereinheit 2 wird die Division als Umkehrung zur Multiplikation erarbeitet und gefestigt.

Weiterführende Literatur

KIRA (o.J.): *Halbschriftliche Division*. https://kira.dzlm.de/arithmetik/halbschriftliches-rechnen/halbschriftliche-division

KMK (2004). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Wolters Kluwer Deutschland.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2008). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Spektrum.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Klett.

N6C Was können wir diagnostizieren?

Dauer: 20 - 25 Minuten

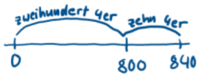
Hinweise zur Durchführung:

Vor der Durchführung sollte den Lernenden erklärt werden, dass sie nicht schriftlich dividieren sollen. Falls den Lernenden die Begrifflichkeiten nicht klar sind, kann der schriftliche Algorithmus für eine beliebige (nicht im Dokument) enthaltene Aufgabe an die Tafel geschrieben werden und anschließend darauf verwiesen werden, dass dieses Verfahren nicht genutzt werden soll.
Bei Schwierigkeiten zur Notation des Rechenwegs kann es helfen, die Lernenden aufzufordern, ihren Rechenweg / ihre Kopfrechnung mündlich zu erläutern. Anschließend werden sie gebeten, das mündlich Beschriebene aufzuschreiben.

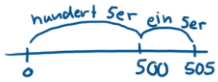
1 Divisionen zerlegen am Bild

Löse die Aufgaben. Notiere deine Rechenschritte.
Zeichne dazu passend zu (1) ein Bild, z.B. mit Schritten am Zahlenstrahl.

(1) 840 : 4 = 210
800 : 4 = 200
40 : 4 = 10



(2) 505 : 5 = 101
500 : 5 = 100
5 : 5 = 1



2 Divisionen schrittweise oder mit Umkehraufgaben rechnen

a) Löse die Aufgaben in mehreren Schritten. Notiere die Rechenschritte.

(1) 396 : 3 = 132
300 : 3 = 100
90 : 3 = 30
6 : 3 = 2

(2) 2 024 : 4 = 506
2000 : 4 = 500
20 : 4 = 5
4 : 4 = 1

Beschreibe für (1), wie du herausgefunden hast, wie oft die 3 in die 396 passt.
Ich schaue zunächst wie oft die 3 in den Hunderter passt, dann in den Zehner und danach in den Einer.

b) Löse die Aufgaben, indem du sie in Schritte zerlegst. Notiere die Rechenschritte.

(1) 12852 : 6 = 2142
12000 : 6 = 2000
600 : 6 = 100
252 : 6 = 42

(2) 12 852 : 12 = 1071
12000 : 12 = 1000
600 : 12 = 50
252 : 12 = 21

(3) Erkläre, wie du in (2) rechnest.
Ich zerlege die 12852 so, dass ich leichtere Teilaufgaben habe.

Hinweise zur Auswertung

Diagnoseaufgabe 1

<table>
<tr><th>Typische Fehler</th><th>Mögliche Ursache</th><th>Förderung</th></tr>
<tr><td>Es wird nur das schriftliche statt des halbschriftlichen Verfahrens angewendet</td><td>Evtl. unvollständiges Verständnis für die halbschriftlichen Rechenstrategien</td><td>An 1.1 – 1.6 Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion erarbeiten, um Einsichten in das Stellenwerverständnis zu wiederholen/vertiefen. Das (Ent-)Bündeln kann in Baustein N1 wiederholt werden.</td></tr>
<tr><td>Dividend und Divisor werden in Teilrechnung vertauscht</td><td>Evtl. Flüchtigkeitsfehler, evtl. unvollständiges Operationsverständnis zur Division</td><td>An N4B die Rolle des Dividenden und Divisors erarbeiten</td></tr>
<tr><td>Teilergebnisse werden nicht stellengerecht verrechnet</td><td>Evtl. Flüchtigkeitsfehler; evtl. unvollständiges Operationsverständnis zur Division</td><td>Evtl. ein Flüchtigkeitsfehler. Ansonsten unvollständiges Verständnis für die Berechnung von Divisionsaufgaben: Berechnung des Ganzen aus den Teilergebnissen</td></tr>
<tr><td>Der Dividend wird falsch oder unvollständig aufgeteilt</td><td>Evtl. Flüchtigkeitsfehler; evtl. unvollständiges Operationsverständnis zur Division</td><td>Erarbeiten und Üben der Zerlegung des Dividenden und der halbschriftlichen Strategien an Punktefeldern mit N6 C.1.1-1.2</td></tr>
<tr><td>Es wird nur das Ergebnis im Bild dargestellt</td><td rowspan="2">Evtl. unvollständige Vorstellung zur Division, evtl. Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel</td><td rowspan="2">An N4 B.3.1-3.5 die Vorstellung des Aufteilens erarbeiten und üben</td></tr>
<tr><td>Versuch, alle Zahlen der Gleichung und alle Zahlen der Nebenrechnung (z.B. 10) im Bild darzustellen</td></tr>
</table>

N6C Wie können wir fördern, sicher zu dividieren und Rechenwege zu erklären?

1 Divisionen zerlegen am Bild

1.1 **Erarbeiten**

Ziel: Divisionsaufgaben am Zahlenstrahl darstellen und erklären

Material: -

Umsetzung: 1.1 a) UG, b), c) EA

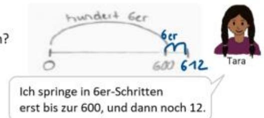
Hintergrund:
Die Lernenden sollen Divisionsaufgaben am Zahlenstrahl darstellen und erklären. Die Voraussetzung dafür ist, dass die Lernenden die Division in Zahlenstrahldarstellungen hineinsehen können (Baustein **N4 B**). Am Zahlenstrahl wird hier die Anzahl und die Mächtigkeit der Bündel über dem Bogen notiert („sechzig 7er“), damit deutlich wird, welche Schritte zu Bündeln zusammengefasst werden. Daher müssen dann auch nicht alle einzelnen Schritte eingezeichnet werden.

In Aufgabenteil c) wird die Zerlegung des Dividenden innerhalb eines Päckchens, bzw. der Zusammenhang der einzelnen Aufgaben, deutlich. Das bietet eine Vorbereitung für die Aufgabe 1.2., da dort wird Zerlegung zum einfacheren Rechnen genutzt wird. Der Zerlegung liegt das Distributivgesetz zugrunde, dieser Begriff muss den Kindern nicht wörtlich bekannt sein. Jedoch kann/muss durch die Darstellungsvernetzung die Struktur thematisiert werden.

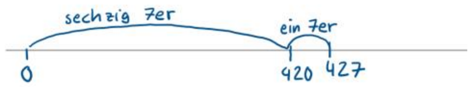
Impulse:
- Wie passt Taras Bild zu der Aufgabe 612 : 6?
- Sprich in b) wie Tara.
- Wie helfen dir die ersten beiden Aufgaben in c) für die dritte? Warum?

1.1 Divisionen zerlegen

a) Wie will Tara **612 : 6** lösen? Zeichnet ihr Bild fertig.
Warum muss sie nicht alle einzelnen Schritte zeichnen?



b) Löse **427 : 7**. Erkläre am Bild, wie du vorgehst.
Warum musst du nicht alle 7er-Schritte hinzeichnen?



c) Löse die Aufgaben mit Zahlenstrahl. Wie hängen die Aufgabe eines Päckchens zusammen?

(1) 250 : 5 = 50
500 : 5 = 100
750 : 5 = 250

(2) 800 : 8 = 100
160 : 8 = 20
960 : 8 = 120

(3) 1500 : 15 = 100
450 : 15 = 30
1950 : 15 = 130

1.2 **Erarbeiten**

Ziel: Divisionsaufgaben am Zahlenstrahl darstellen und erklären

Material: -

Umsetzung: 1.2 a) UG, b) EA, c) UG, d) EA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Darstellung der Division am Zahlenstrahl mit der Termschreibweise verbinden. Die Notation der Rechnung als Rechenkette ist für die Lernenden vermutlich neu, zeigt aber gut, was eigentlich passiert:
„Wie viele 5er-Schritte passen in 75? Dafür zerlege ich die 75 und frage mich dann: Wie viele 5er-Schritte passen in 50 und wie viele in 25?“
Das Gleichheitszeichen interpretieren viele Lernende häufig nur so, als dass danach das Ergebnis einer Aufgabe steht. Jedoch muss hier bei der Notation besprochen werden, dass es die Gleichheit der Terme ausdrückt („75 : 5 ist das Gleiche wie 50 : 5 + 25 : 5“).

Die Lernenden wissen zwar, dass sie die Schritte nicht einzeln einzeichnen müssen. Hier wird es aber nochmal gemacht, um die Zerlegung zu veranschaulichen.

Impulse:
- Wo siehst du zehn 5er-Schritte? Zeichne einen großen Schritt wie in Aufgabe 1.1 und beschrifte ihn.
- Warum haben die beiden Aufgaben in d) das gleiche Ergebnis?

1.2 Divisionen durch größere Zahlen

a) Kenan hat die Division am Zahlenstrahl zerlegt.
Erklärt, wie sein Bild zu seiner Rechnung und seiner Beschreibung passt.

75 : 5
= 50 : 5 + 25 : 5
= 10 + 5
= 15

b) Löse **750 : 50** am Zahlenstrahl und löse die Aufgabe so wie Kenan.
Schreibe die Erklärung in dein Heft.

c) Löst **7500 : 500**. Wie müsst ihr Eure Bilder aus **b)** ändern?

d) Löse die Aufgaben:

(1) 720 : 6 = 120
7200 : 60 = 120

(2) 856 : 4 = 214
8560 : 40 = 214

(3) 143 : 13 = 11
14300 : 1300 = 11

2 Divisionen schrittweise oder mit Umkehraufgaben rechnen

2.1 – 2.2 **Erarbeiten und Üben**

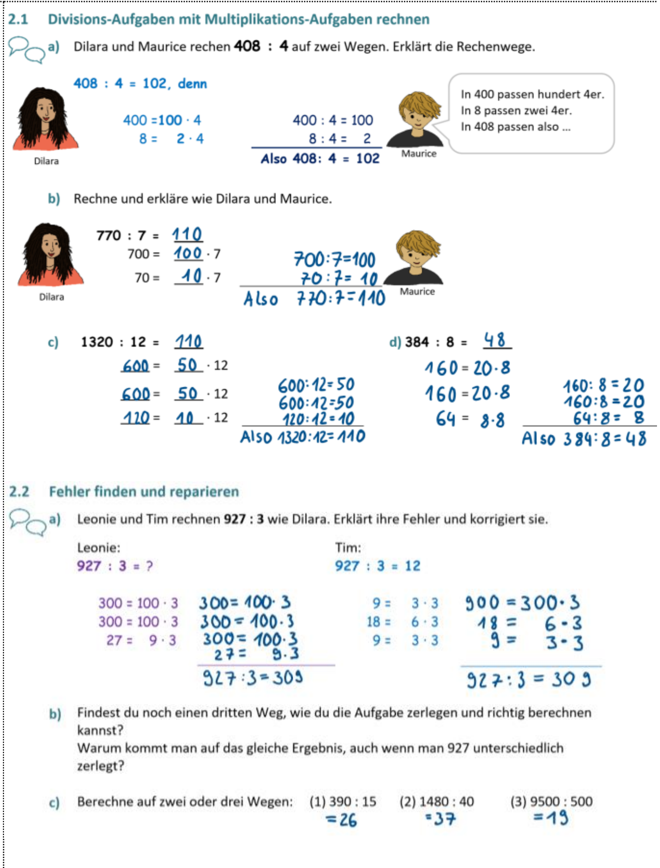
Ziel: Zusammenhang von Multiplikation und Division zum Lösen für Divisionsaufgaben nutzen

Material: -

Umsetzung: 2.1 a) UG b), c) EA und UG; 2.2 a) UG, b), c) EA

Hintergrund:
Die Lernenden sollen die Division als Umkehrung zur Multiplikation festigen und das als Strategie zum Lösen von Divisionsaufgaben erarbeiten und üben.
Die Notation der einzelnen Multiplikationsaufgaben, die in der Divisionsaufgabe enthalten sind, fördert das Operationsverständnis zur Division und beugt einem rezeptartigen Vorgehen vor.
Dabei ist den Lernenden freigestellt, wie genau sie die Multiplikation und Division notieren. Wichtig ist, dass sie den Zusammenhang erkennen und ihn für ihre Bearbeitung nutzen können.

Impuls:
- Wie passen Dilaras und Maurices Rechenweg zusammen? Wie hilft Maurice Dilaras Rechenweg?



2.1 Divisions-Aufgaben mit Multiplikations-Aufgaben rechnen

a) Dilara und Maurice rechnen **408 : 4** auf zwei Wegen. Erklärt die Rechenwege.

Dilara:
408 : 4 = 102, denn
400 = 100 · 4
8 = 2 · 4

Maurice:
400 : 4 = 100
8 : 4 = 2
Also 408 : 4 = 102

In 400 passen hundert 4er.
In 8 passen zwei 4er.
In 408 passen also ...

b) Rechne und erkläre wie Dilara und Maurice.

Dilara:
770 : 7 = 110
700 = 100 · 7
70 = 10 · 7

Maurice:
700 : 7 = 100
70 : 7 = 10
Also 770 : 7 = 110

c) 1320 : 12 = 110
600 = 50 · 12
600 = 50 · 12
120 = 10 · 12

600 : 12 = 50
600 : 12 = 50
120 : 12 = 10
Also 1320 : 12 = 110

d) 384 : 8 = 48
160 = 20 · 8
160 = 20 · 8
64 = 8 · 8

160 : 8 = 20
160 : 8 = 20
64 : 8 = 8
Also 384 : 8 = 48

2.2 Fehler finden und reparieren

a) Leonie und Tim rechnen **927 : 3** wie Dilara. Erklärt ihre Fehler und korrigiert sie.

Leonie:
927 : 3 = ?
300 = 100 · 3
300 = 100 · 3
27 = 9 · 3

300 = 100 · 3
300 = 100 · 3
300 = 100 · 3
27 = 9 · 3
927 : 3 = 309

Tim:
927 : 3 = 12
9 = 3 · 3
18 = 6 · 3
9 = 3 · 3

900 = 300 · 3
18 = 6 · 3
9 = 3 · 3
927 : 3 = 309

b) Findest du noch einen dritten Weg, wie du die Aufgabe zerlegen und richtig berechnen kannst?
Warum kommt man auf das gleiche Ergebnis, auch wenn man 927 unterschiedlich zerlegt?

c) Berechne auf zwei oder drei Wegen: (1) 390 : 15 = 26 (2) 1480 : 40 = 37 (3) 9500 : 500 = 19