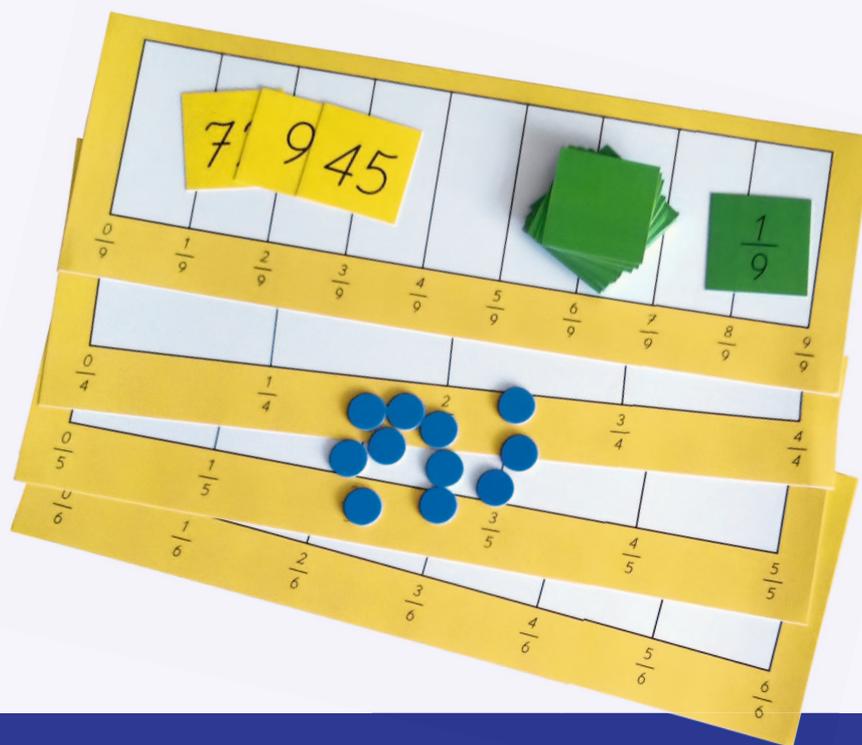


Mathe sicher können

Auszug
"B1 A - Anteile von einem
Ganzen bestimmen und
darstellen" aus:

Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept
zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen



Brüche, Prozente, Dezimalzahlen

Ermöglicht durch

Deutsche
Telekom
Stiftung



Cornelsen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

So funktioniert das Diagnose- und Förderkonzept

In den 16 Diagnose- und Förderbausteinen erarbeiten Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern wichtige Basiskompetenzen.

Standortbestimmung – Baustein B4 A

Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

☺
☹

16 Basiskompetenzen
gliedern die Bausteine und verbinden Diagnose und Förderung.

Diagnose:
Mit 2 bis 4 Aufgaben in der Standortbestimmung stellen Sie fest, was die Lernenden schon können.

Die Standortbestimmungen befinden sich im hinteren Teil dieser Handreichungen als Kopiervorlage.

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man

- den ganzen Schokoriegel
- Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel beschreiben?

b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.

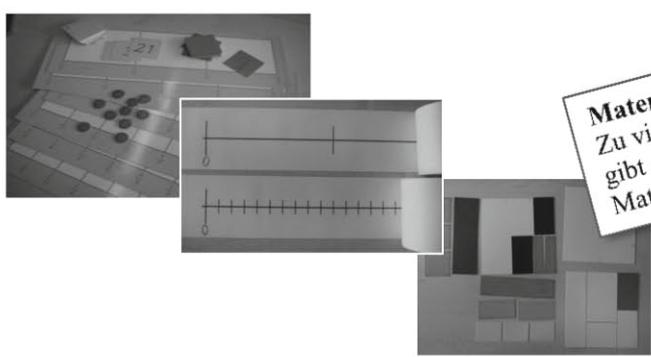
c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

Emily:

Maurice:

Förderung:
Zu jeder Diagnoseaufgabe gibt es eine passende Fördereinheit, die differenziert und gemeinsam bearbeitet wird.

Die Fördereinheiten sind in einem eigenen Förderheft abgedruckt und in dieser Handreichung erläutert.



Material:
Zu vielen Förderaufgaben gibt es Material, mit dem man Mathe besser verstehen kann.

Tipps zum Material sind in dieser Handreichung. Viele Materialien befinden sich im zugehörigen Materialkoffer von Cornelsen Experimenta

Mathe sicher können

Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen

Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Herausgegeben von

Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

Entwickelt und Erprobt von

Stephan Hußmann
Birte Pöhler
Susanne Prediger
Andrea Schink
Lara Sprenger

Erarbeitet an der Technischen Universität Dortmund
im Rahmen von `Mathe sicher können`, einer Initiative der Deutsche Telekom Stiftung.

Herausgeber: Susanne Prediger, Christoph Selter, Stephan Hußmann, Marcus Nührenbörger
Autorinnen und Autoren: Stephan Hußmann, Birte Pöhler, Susanne Prediger, Andrea Schink,
Lara Sprenger

Redaktion: Corinna Mosandl, Birte Pöhler, Lara Sprenger

Illustration der Figuren: Andrea Schink

Alle sonstigen Bildrechte für Illustrationen und technische Figuren liegen bei den
Herausgebern.

Umschlaggestaltung: Corinna Babylon

Unter der folgenden Adresse befinden sich multimediale Zusatzangebote:
www.mathe-sicher-koennen.de/Material

Die Links zu externen Webseiten Dritter, die in diesem Lehrwerk angegeben sind,
wurden vor Drucklegung sorgfältig auf ihre Aktualität geprüft. Der Verlag übernimmt keine
Gewähr für die Aktualität und den Inhalt dieser Seiten oder solcher,
die mit ihnen verlinkt sind.

1. Auflage, 1. Druck 2014

© 2014 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.

Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen
schriftlichen Einwilligung des Verlages.

Hinweis zu den §§ 46, 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche
Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich
gemacht werden.

Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Druck: DBM Druckhaus Berlin-Mitte GmbH

ISBN 978-3-06-006536-3



PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig
bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten
Quellen.
www.pefc.de

Inhaltsverzeichnis der Handreichungen Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Hintergrund des Diagnose- und Förderkonzepts

(Susanne Prediger, Christoph Selter, Stephan Hußmann & Marcus Nührenbörger)

Ausgangspunkte und Leitideen	7
Strukturierung des Diagnose- und Fördermaterials	7
Strukturierung der Handreichung	9

Einbettung 1: Lernförderliche Unterrichtsmethoden

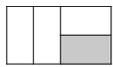
(Gastbeitrag von Bärbel Barzel, Markus Ehret, Raja Herold & Timo Leuders) 13

Einbettung 2: Anregung und Unterstützung der fachbezogenen Unterrichtsentwicklung

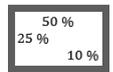
(Gastbeitrag von Olivia Mitas & Martin Bonsen) 17

Bruchverständnis – Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen

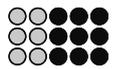
B1 Brüche und Prozente verstehen (Andrea Schink & Susanne Prediger)



B1 A Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen 21

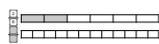


B1 B Ich kann Prozente bestimmen und darstellen 31



B1 C Ich kann Anteile von Mengen bestimmen und darstellen 38

B2 Gleichwertigkeit verstehen (Andrea Schink, Birte Pöhler & Susanne Prediger)



B2 A Ich kann gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden 47



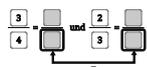
B2 B Ich kann gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden 55



B2 C Ich kann Brüche und Prozente ineinander umwandeln 64

Rechnen mit Brüchen – Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen

B3 Brüche und Prozente ordnen (Andrea Schink & Susanne Prediger)



B3 A Ich kann Brüche gleichnamig machen 73



B3 B Ich kann Brüche und Prozente vergleichen und der Größe nach ordnen 81

B4 Mit Brüchen rechnen (Andrea Schink & Susanne Prediger)



B4 A Ich kann Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen 91

Dezimalverständnis – Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen

- D1** Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen
(Lara Sprenger & Stephan Hußmann)



E	z	h	t
2	3	8	5

- D1 A** Ich kann Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen

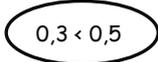
101

- D2** Dezimalzahlen ordnen und vergleichen
(Lara Sprenger & Stephan Hußmann)



- D2 A** Ich kann zu Dezimalzahlen Nachbarzahlen angeben und in Schritten zählen

113

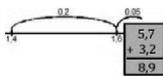


- D2 B** Ich kann Dezimalzahlen vergleichen und der Größe nach ordnen

122

Rechnen mit Dezimalzahlen – Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen

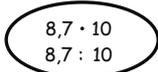
- D3** Addieren und Subtrahieren von Dezimalzahlen
(Lara Sprenger & Stephan Hußmann)



- D3 A** Ich kann am Zahlenstrahl und schriftlich addieren und subtrahieren

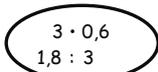
128

- D4** Multiplizieren und Dividieren von Dezimalzahlen
(Lara Sprenger & Stephan Hußmann)



- D4 A** Ich kann Dezimalzahlen mit Zehnerzahlen multiplizieren und dividieren

139



- D4 B** Ich kann Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen multiplizieren und dividieren

146

Zusammenhang von Dezimalzahlen und Brüchen – Hinweise zu dem Diagnose- und Förderbaustein

- DB** Zwischen Brüchen und Dezimalzahlen übersetzen
(Lara Sprenger, Andrea Schink, Stephan Hußmann & Susanne Prediger)

$$0,2 = \frac{2}{10}$$
$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

- DB** Ich kann einfache Dezimalzahlen und Brüche ineinander umwandeln

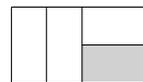
155

Kopiervorlagen

165

- Standortbestimmungen (Diagnosebausteine)**
(Andrea Schink, Lara Sprenger & Birte Pöhler)

Auswertungstabellen



B1 A Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen – Didaktischer Hintergrund

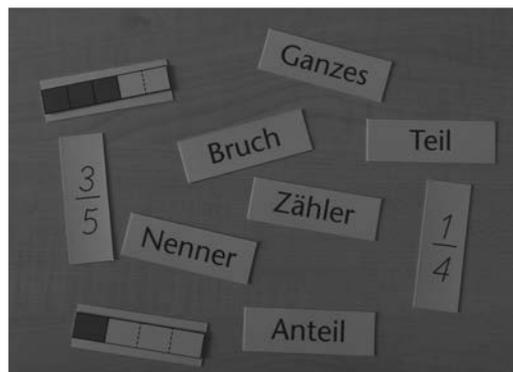
Lerninhalt

Mit den Brüchen begegnet Lernenden zwar einiges Vertrautes, viele Eigenschaften der natürlichen Zahlen gelten jedoch plötzlich nicht mehr. Der verständnisorientierten (Wieder-)Erarbeitung anschaulicher Bruchvorstellungen, welche die Basis der gesamten Bruchrechnung bilden, kommt daher eine zentrale Bedeutung zu.

Der *Anteil von einem Ganzen* ist eine zentrale Grundvorstellung: Der Bruch bezieht sich dabei auf *ein* (zusammenhängendes) Ganzes (z.B. Kuchen oder Pizza).

Zusammenhänge zwischen dem Teil, dem Anteil und dem Ganzen verstehen

Um tragfähige inhaltliche Vorstellungen aufzubauen, sollten alle Lernenden verstehen, dass Anteile immer in Bezug zu einem Ganzen und einem Teil interpretiert werden müssen. Dabei kommt es auf die Relation des Teils zum Ganzen an. Diese Zusammenhänge müssen systematisch und operativ erarbeitet und verinnerlicht werden.



Fachbegriffe zu Brüchen und ihre Bedeutung im Bild

Manche Lernende haben zunächst Schwierigkeiten mit dem Begriff *Anteil*. Wichtig ist, dass sie den Bruch inhaltlich als Anteil verstehen, d.h. ihn auf ein Ganzes bezogen deuten können. Andere aktivieren auch Verhältnisvorstellungen von Brüchen (1 Stück wird markiert und 3 nicht, also $1/3$), die in diesem Kontext nicht tragfähig sind.

Interpretationen des „Anteils von einem Ganzen“ für Stamm- und Nicht-Stammbrüche

Für Stammbrüche (d.h. Brüche mit Zähler 1) gibt es zwei miteinander verbundene Interpretationen:

- *Interpretation 1:* Ein Bruch kann in einer Verteilungssituation gedeutet werden. Der Zähler steht dann für das Ganze, das verteilt wird; der Nenner für die Anzahl der Personen, die sich das Ganze gerecht (d.h. jeder bekommt gleich viel) teilen. Der Bruch gibt den Anteil an, den *eine* Person von diesem Ganzen bekommt.

- *Interpretation 2:* Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Stücke das Ganze zerlegt wird. Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke im relevanten Teil davon an – er *zählt* also.

Beide Interpretationen sind in Fördereinheit 1 möglich. Die erstgenannte ist durch ihren Kontextbezug intuitiv zugänglich, kann jedoch beim Übergang zu Nicht-Stammbrüchen (d.h. Brüchen mit Zählern ungleich 1) gerade schwächeren Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten, da in diesem Fall von mehreren Ganzen ausgegangen wird ($2/3$ bedeutet „3 Leute teilen sich 2 Pizzen“). Deshalb wird sie in Fördereinheit 2 nicht aufgegriffen. Stattdessen werden Nicht-Stammbrüche gemäß Interpretation 2 gedeutet.

Veranschaulichung und Material

Flächige ikonische Darstellungsmittel

Das hier genutzte zentrale Darstellungsmittel ist die Rechteckdarstellung. Zwar ist auch der Kreis für das Ganze eine prominente und gut lebensweltlich anknüpfbare Darstellung („Pizza“), jedoch hat er im Gegensatz zur Rechteckdarstellung nur eine begrenzte Reichweite bei der Erarbeitung weiterführender Konzepte (z.B. Addition / Multiplikation von Brüchen). Lebensweltlich lässt sich das Rechteck als „Blechkuchen“ deuten.

Ergänzt werden Rechtecke z.T. durch weitere Formen, um eine Flexibilisierung der Vorstellungen anzuregen. Bruchstreifen als spezielle flächige Darstellungen werden ebenfalls genutzt, da sie für das Erweitern und Ordnen (Bausteine **B2 A**, **B2 B**, **B3 B**) eine wichtige Rolle spielen.

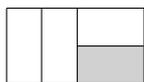
Auf Kästchenpapier wird weitgehend verzichtet: Der Fokus liegt weniger auf der exakten Darstellung der Anteile durch die Lernenden, als auf dem konzeptuellen Verstehen der Zusammenhänge.

Flächige haptische Anschauungsmittel

Neben den rein ikonischen Darstellungsmitteln kommen auch Papier zum Falten von Anteilen sowie Bruchpuzzles zum Einsatz, um einen stärker handlungsorientierten Zugang zu Brüchen zu ermöglichen:



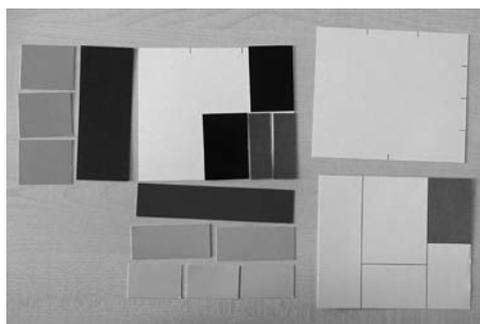
Anteile zeichnen und falten



Handreichungen – Baustein B1 A
 Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen

Durch das Falten von Papier können Lernende haptisch erfahren, dass der Anteil umso kleiner wird, je größer der Nenner (bzw. in je mehr Stücke das Ganze zerlegt) ist.

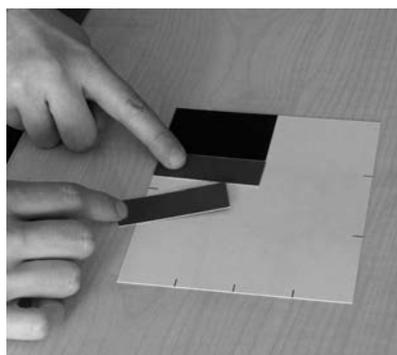
Bruchpuzzles ermöglichen es, verschiedene Anteile nachzulegen und zu vergleichen: „1/9 vom Ganzen passt dreimal in das Drittel“ ist dabei eine mögliche Einsicht, die Lernende intuitiv am Material machen können. Darüber hinaus ermöglicht das Bruchpuzzle, zu enge Vorstellungen aufzubrechen: Manche Schülerinnen und Schüler verstehen z.B. 1/7 nur als „1 von 7 Stücken“. Sind weniger als sieben Stücke markiert (wie in der weißen Fläche rechts unten im Bild), so stehen sie vor der Schwierigkeit, das graue Stück als 1/7 zu deuten. Durch das Auslegen der Fläche mit Puzzleteilen können Strategien entwickelt werden, Anteile richtig zu deuten.



Das Bruchpuzzle und seine Struktur

Aufbau der Förderung

Die Kompetenz beginnt in **Fördereinheit 1 (Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen)** mit der Erarbeitung des Anteils von einem Ganzen mit Stammbrüchen. Dabei wird der Anteil inhaltlich in *Kuchen-Verteilungs-Situationen* gedeutet und der Zusammenhang von Nenner und Größe des Teils bzw. Anteils erarbeitet:



Anteile über Auslegen von Flächen bestimmen

Sowohl durch das Falten von Papier, als auch über operative Bilderfolgen wird die Auswirkung der Veränderung des Nenners bei gleichbleibendem Zähler und Ganzen auf den Teil und den Anteil untersucht. Im weiteren Verlauf werden die Vorstellungen zum Anteil und dem Zusammenhang zwischen ihm, dem Teil und

dem Ganzen durch Variationen des Ganzen erweitert sowie die Begrifflichkeiten erarbeitet.

Eine weitere Systematisierung betrifft das Aufbrechen der zunächst im Verteilungskontext genutzten Vorstellung, dass der Nenner angibt, in wie viele Stücke das Ganze zerlegt wurde: Diese Vorstellung wird durch das Nutzen eines Bruchpuzzles zu der Einsicht erweitert, dass der Nenner zwar etwas mit der Zerlegung des Ganzen zu tun haben kann, doch bei ungleichmäßiger Zerlegung nicht haben muss (z.B. „1/4 bleibt 1/4 vom Ganzen, auch wenn der Rest nur aus einem Stück besteht.“).

Fördereinheit 2 (Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen) zur Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen hat einen zu Fördereinheit 1 analogen Aufbau und knüpft an die Erfahrungen aus dieser an. Hier wird zunächst die Rolle des Zählers (bei gleichbleibendem Nenner und Ganzen) erarbeitet, bevor dann ebenfalls Aufgaben zur Systematisierung und zum Üben folgen.

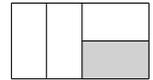
Anzahl Kuchen und Kinder:	Bild Das bekommt ein Kind:	Anteil für ein Kind:
1 Kuchen für 2 Kinder		$\frac{1}{2}$
1 Kuchen für 4 Kinder		$\frac{1}{4}$
1 Kuchen für 6 Kinder		$\frac{1}{6}$
1 Kuchen für 8 Kinder		$\frac{1}{8}$

So viele Stücke hat der ganze Riegel:	Diesen Teil, also so viele gleich große Stücke, bekommt Tim:	Bild. Das bekommt Tim:	Tims Anteil vom Schokoriegel:
5	1		$\frac{1}{5}$
5	2		$\frac{2}{5}$
5	3		$\frac{3}{5}$
5	4		$\frac{4}{5}$
5	5		$\frac{5}{5}$
6	4		$\frac{4}{6}$

Operatives Erarbeiten der Bedeutung von Zähler und Nenner

Weiterführende Literatur

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4 - 8.
 Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 27 - 46.
 Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. Manuskript. Online. Aachen. <http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf>



B1 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 30 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Manche Lernende haben Hemmungen, ihr Vorgehen schriftlich zu beschreiben (vor allem 1 d) und 2 b)). Oft hilft es schon sie zu motivieren, ihre Ideen so aufzuschreiben, wie sie sie denken. Um Vorstellungen nicht zu verfälschen, ist es sinnvoll, keine Formulierungsvorschläge zu machen.

Wenn Lernende in 1 c) irritiert sind, weil sie in beiden Bildern den Anteil $\frac{1}{4}$ ablesen („Da kommt beide Male derselbe Anteil raus, aber das Bild sieht anders aus?“), auffordern, ihre Schwierigkeiten mit der Aufgabe zu notieren.

Kann ich Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen?

1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an. Anteil: $\frac{1}{6}$

b) Zeichne den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. Anteil: $\frac{1}{8}$

c) Gib den Anteil für den grauen Teil an. (1) Anteil: $\frac{1}{4}$ (2) Anteil: $\frac{1}{8}$

d) Erkläre deine Lösung zum Bild c) (2):
Das Stück ist die Hälfte von (1). Es passt achtmal in das Rechteck.

2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib jeweils den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an. (1) Anteil: $\frac{4}{5}$ (2) Anteil: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

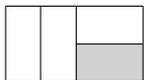
b) Erkläre deine Lösung zu Bild a) (2):
Ich habe aus 1 Körstchen 2 kleine gemacht.

c) Zeichne für beide Bilder den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. (1) Anteil: $\frac{7}{10}$ (2) Anteil: $\frac{3}{4}$

Hinweise zur Auswertung:

Diagnoseaufgabe 1: Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

Typische Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
a), b), c.1) $\frac{1}{5}, \frac{5}{1} / \frac{1}{3}, \frac{3}{1}$ 	Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben.	
b)	8 Felder ohne Markierung: Flüchtigkeitsfehler oder problematische Gleichsetzung mit „geachteltem Ganzen“.	(Wieder-)Erarbeitung der Anteilsvorstellung in 1.1 - 1.4, danach weitere Aufgaben zur Systematisierung, insbesondere 1.5. Bei b) Zeichnungenauigkeiten berücksichtigen.
b), c), d) Erklärung zu Bild (3): $\frac{1}{4}$ <i>weil da 4 Stück sind aber es wurde 1 angemalt.</i>	Größe der Stücke wird nicht beachtet.	
c.2) z.B. $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$	Vermutlich richtige Idee, dass es auf Größe der Stücke ankommt. Schwierigkeiten beim Abschätzen.	Mündlich nachfragen. Ggf. üben mit 1.6.
c.2), d) keine Angabe	Anteil kann bei <i>schwierigerer</i> Aufteilung nicht abgelesen werden. Irritation wegen c) (1).	Überprüfen, ob Schwierigkeit in der Strukturierung des Ganzen liegt, dann 1.6 bearbeiten.

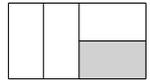


Handreichungen – Baustein B1 A

Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen

Diagnoseaufgabe 2: Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a.1), a.2)	$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{9}{3}$	Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben (z.T. bei Nichtberücksichtigung der Größe der Stücke).	Ggf. (Wieder-)Erarbeitung der Anteilsvorstellung in 1.1 - 1.4, danach weitere Aufgaben zur Systematisierung, insbesondere 1.5 sowie 2.1 - 2.4 zur Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen.
a.2), c.2)	$\frac{2}{11}$ 	Nichtberücksichtigung der Größe der Stücke.	Ggf. Flexibilisierung des Zusammenhangs von Teil und Ganzem in 1.6. Erarbeitung von Nicht-Stammbrüchen (2.1 - 2.4). Danach Systematisierung und Flexibilisierung des Zusammenhangs von Teil und Ganzem auch bei Nicht-Stammbrüchen (2.5; 2.6). Zeichengenauigkeiten berücksichtigen.
b)	z.B. „Ich kann das nicht rechnen, weil 2 Kästchen zusammen sind.“	Schwierigkeiten, mit unterschiedlicher Größe der Stücke umzugehen.	



1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

1.1 Erarbeiten (30 - 40 Minuten)

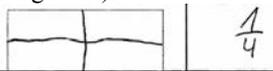
Ziel: Stammbrüche im Kontext des gerechten Verteilens eines Ganzen bestimmen und darstellen

Material: Ggf. Papier zum Falten der Anteile

Umsetzung: a) UG, dann EA; b) UG

Zu beachten: *Gerecht* klären: Jeder bekommt gleich viel. Operative Veränderung (siehe b)) gut sichtbar bei horizontaler Einteilung der Streifen. Andere Aufteilungen nutzen, um Teile / Anteile zu derselben Situation zu vergleichen. Zeichnungengenauigkeiten ansprechen (Impuls: Ich würde mir dieses (größtes der jeweils gezeichneten Stücke) Stück aussuchen), aber Verständnis unterordnen.

Hintergrund: Anteile falten = Handlungsorientierung
Typische Schwierigkeit: Lernende markieren nicht den Teil, sondern nur Zerteilung (d.h. für $\frac{1}{4}$ werden 4 Stücke eingezeichnet, aber keines wird markiert / ausgemalt):



Impuls: Ich sehe $\frac{0}{4}$, $\frac{0}{6}$ etc. – wird in 1.5 aufgegriffen.

Typische Schwierigkeit: Manche Lernende argumentieren: „Je größer der Nenner, desto größer der Anteil.“

Zu beachten: Größe des Anteils mit Kuchenmenge pro Kind verknüpfen: Mehr Kinder, weniger Kuchen, also kleinerer Anteil.

1.1 Welchen Anteil bekommt ein Kind?

a) Wie muss man schneiden, wenn sich mehrere Kinder gerecht einen Blechkuchen teilen? Welchen Anteil bekommt ein Kind? Falte zuerst ein Blatt immer so, wie du den Kuchen schneiden würdest. Ergänze dann die Tabelle. Erkläre wie du dabei vorgegangen bist.



Anzahl Kuchen und Kinder:	Bild Das bekommt ein Kind:	Anteil für ein Kind:
1 Kuchen für 2 Kinder		$\frac{1}{2}$
1 Kuchen für 4 Kinder		$\frac{1}{4}$
1 Kuchen für 6 Kinder		$\frac{1}{6}$
1 Kuchen für 8 Kinder		$\frac{1}{8}$

b) Was passiert mit dem Anteil, wenn doppelt so viele Kinder mitessen? Was passiert mit dem Anteil, wenn immer mehr Kinder dazu kommen?

Doppelt so viele Kinder \rightarrow halb so großer Anteil für jeden (d.h. halb so viel Kuchen für jeden); mehr Kinder \rightarrow kleinerer Anteil für jedes Kind.

1.2 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

Ziel: Stammbrüche ablesen; Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem erkennen und beschreiben

Material: -

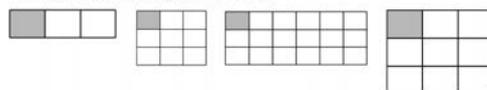
Umsetzung: a) EA, dann UG; b) UG

Zu beachten: Werden Zähler und Nenner nicht tragfähig gedeutet, zunächst zu 1.3 wechseln und Fachbegriffe klären, an 1.1 anbinden. Bei Schwierigkeiten Lernende auffordern, alles zu beschreiben, was sie entdecken, ggf. steuern durch Bilderauswahl.

Lösung: Entdeckbare Muster: 1 nach 4: Teil gleich, Ganzes größer, Anteil kleiner (Quantifizierung nicht notwendig). 2 nach 3: Teil gleich, Ganzes größer, Anteil kleiner. 2 nach 4: anderer Teil, anderes Ganzes, aber dennoch gleicher Anteil.

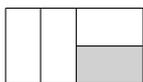
1.2 Anteile von verschiedenen Kuchen

a) Hier sind verschiedene Kuchen. Die Kinder bekommen immer das dunkle Stück. Welcher Anteil vom Kuchen ist das jeweils?



Jonas' Anteil: $\frac{1}{3}$ Tims Anteil: $\frac{1}{9}$ Leonies Anteil: $\frac{1}{18}$ Kenans Anteil: $\frac{1}{9}$

b) Vergleiche das 1. mit dem 4. Bild: Das Stück ist gleich. Was ist mit dem Anteil? Vergleiche auch die anderen Bilder. Welche Muster kannst du finden?



Handreichungen – Baustein B1 A

Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen

1.3 Erarbeiten (5 - 10 Minuten)

Ziel: Fachbegriffe und ihre konzeptuelle Bedeutung erarbeiten

Material: MB: Bruchbegriffe

Umsetzung: EA, dann GA

Zu beachten: Beherrschung von Fachbegriffen ist zentral: Kärtchen später immer wieder aufgreifen. *Anteil* ist schwieriger Begriff, da er Beziehung zwischen Teil und Ganzem herstellt. Er sollte auch an die Deutung im Kuchenkontext angebunden werden (1.1).

Weitere Aufgabe: Bei Zuordnungsschwierigkeiten können auch weitere Stammbruch-Anteile zur Verdeutlichung betrachtet werden.

1.3 Was hat der Bruch mit dem Bild zu tun?

Sortiere die Kärtchen: Welche Begriffe gehören zum Bruch und zum Bild? Schreibe den Text ab und ergänze die fehlenden Begriffe und Angaben.



Der Bruch beschreibt den Anteil.
 Hier: $\frac{1}{4}$
 Im Nenner steht, in wie viele gleich große Felder das Ganze zerlegt wurde. Hier: 4
 Im Zähler steht, wie viele Felder zum Teil gehören. Hier: 1

1.4 Üben (20 - 30 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Stammbrüche bestimmen und darstellen; Operativ Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil, Ganzem durcharbeiten

Material: -

Umsetzung: a), b), c) jeweils EA, dann UG; d) UG; e) Aufgabengenerator (PA)

Zu beachten: Zeichnungenaugigkeiten ansprechen (Ich würde mir dieses Stück aussuchen.), aber dem Verständnis unterordnen.

Zu beachten: Beschreibung der Muster ist hier wichtiger als exakte Fortführung. Werden Muster nicht erkannt, Aspekte ansprechen: Was passiert mit dem Ganzen? etc. Verschiedene Bilder der Lernenden vergleichen.

Lösung: Operatives Muster in a): Ganzes wird größer, Teil bleibt gleich, d.h. Anteil wird kleiner.

Operatives Muster in b): Ganzes bleibt gleich, Anteil wird kleiner, d.h. Teil wird kleiner. (Zu beachten: Wird ein anderer Anteil ergänzt, dieses Muster thematisieren lassen.)

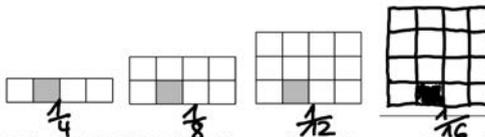
Operatives Muster in c): Gleicher Anteil kann bei unterschiedlichen Ganzen anders aussehen.

Zu beachten: Qualität des Prozesses sicherstellen, wenn Lernende sich oder andere überfordern. Falls keine Ideen, Muster aus anderen Teilaufgaben aufgreifen.

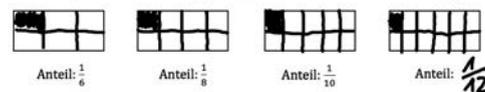
Reflexion: Bei eigenen Bildern eventuelle „ungerechte“ Verteilungen als Lernchance nutzen und diskutieren.

1.4 Anteile bestimmen und ablesen

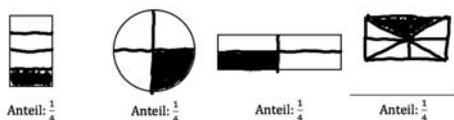
a) Bestimme für jedes Bild den Anteil. Wie könnte es weiter gehen?



b) Zeichne für jedes Bild den Teil ungefähr passend ein. Wie könnte es weiter gehen?

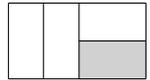


c) Zeichne für jedes Bild den Teil ungefähr passend ein. Ergänze ein 4. Bild.



d) Vergleiche jeweils die Bilder in a), b) und c). Was stellst du fest?

e) Eine Person erfindet eine Aufgabe wie in a) oder b), die andere löst sie. Wechselt euch ab.



1.5 Erarbeiten (5 - 10 Minuten)

Ziel: Stammbruch in Bild und Situation deuten; Fehlvorstellungen zu Stammbrüchen thematisieren

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann PA, dann UG; b) PA, dann UG

Lösung: $\frac{1}{8}$ passt zu (2), wenn Inneres nicht mitgezählt wird. Lernende miteinander aushandeln lassen, auf welches Ganze sie gucken. (3) Mit Hinweis auf gerechtes Teilen. (4) Ohne Einschränkung.
 Zu beachten: Lernende auch erläutern lassen, warum die anderen Bilder nicht passen. Bei Schwierigkeiten mit (1) auf 1.1 und 1.3 zurückgreifen. Lernende, die (5) als richtig deuten („Weil da 8 Stücke sind und eines markiert ist.“), finden Systematisierung und Abgrenzung in 1.7.

1.5 Was passt zu $\frac{1}{8}$?

a) Was passt zum Anteil $\frac{1}{8}$? Erkläre.

(1) (2) (3) (4) (5)
 8 Kinder teilen sich eine Pizza. Dann bekommt jedes Kind...

b) Kenan sagt: „Das Bild passt zu $\frac{1}{8}$!“

Kenan: „Das Bild passt zu $\frac{1}{8}$, weil das acht Stücke sind.“

Emily: „Das ist nicht $\frac{1}{8}$! Da fehlt die 1.“

Impuls: Was hat sich Kenan wohl gedacht? Wie würdest du ihm erklären, warum seine Lösung noch nicht stimmt?

Hilfestellung: Falls keine Ideen geäußert werden: „Ich sehe da $\frac{0}{8}$ “ als Impuls.

Was meint Emily mit „Da fehlt die 1.“?

Emily meint, dass man dem Teil nicht sieht: Kenan muss 1 Stück anmalen, dann sieht man 1 von 8 gleich großen Stücken markiert $\rightarrow \frac{1}{8}$.

1.6 Erarbeiten (20 - 30 Minuten)

Ziel: Anteile als Beziehung zwischen Teil und Ganzem deuten; Verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt; Komplexere Anteile im Bild bestimmen lernen

Material: MB: Bruchpuzzle, Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

Hintergrund: Bruchpuzzle hilft, die fehlende Einteilung des Ganzen und damit den Anteil $\frac{1}{4}$ doch zu sehen: Das ganze Rechteck kann mit gleich großen Puzzleteilen ausgelegt werden. Beispiel im Kuchenkontext hilft zu verstehen, dass die Einteilung vom Rest nicht relevant ist: Wenn du $\frac{1}{4}$ von einem Kuchen bekommen sollst, dann ist es für dich egal, ob der Rest 1, 2, 3 oder noch mehr Stücke hat.

1.6 Anteile herausfinden

Emily hat das Bild für den Bruch $\frac{1}{4}$ gezeichnet:

Kenan: „Dein Bild ist komisch. Die 4 sieht man ja gar nicht!“

Emily: „Doch, ich male sie mir im Kopf so ein, dass ich sie sehen kann.“

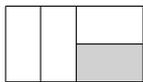
a) Was meint Kenan? Überprüfe Emilys Bild: Wo steckt die 4? Ergänze Emilys Bild.
 Tipp: Du kannst das Bild auch nachlegen.

b) Sieh dir das Anteile-Puzzle an: Finde den Anteil vom dunklen Teil des Rechtecks heraus. Welche Puzzle-Stücke helfen dir dabei? Warum?

Zu beachten: Lernende können auch erst Vermutungen anstellen. Schwächeren Lernenden kann der Anteil wie in a) verraten werden, um Vertrauen in Strategie und Ergebnis zu gewinnen. Manche Lernende bekommen je nach Puzzle-methode verschiedene Anteile als Ergebnis heraus – das sollte zu einem kognitiven Konflikt führen. Weitere Aufgabe: Intuitiver Größenvergleich der Puzzleteile: grün ist $\frac{1}{2}$ von schwarz. Wie viele Stücke braucht man mehr, um das Ganze damit auszuliegen? $\rightarrow 7$ (Man braucht doppelt so viele Stücke.)

zu 1.6 a)
 Kenan versteht $\frac{1}{4}$ als 1 von 4 (gleich großen) Stücken, die er alle gleichzeitig sehen will. Bei Emily sieht er nur 1 von 2 (unterschiedlich großen) Stücken.

zu 1.6 b)
 Anteil $\frac{1}{4}$ gehört zum dunklen Teil. Man kann das Feld mit den schwarzen Puzzle-Stücken auslegen (oder die grünen Stücke nutzen $\rightarrow \frac{2}{14}$)



2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

2.1 Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

Ziel: Nicht-Stammbrüche operativ erarbeiten; Fachbegriffe und ihre Bedeutung erarbeiten

Material: MB: Bruchbegriffe

Umsetzung: a) UG; b) EA; c) UG

Lösung: Weißer Teil 5/12, dunkler Teil 7/12

Hintergrund: Schokoriegel dient als außermathematischer Vorstellungsanker für die, für Lernende u.U. ungewohntere, Darstellung von Anteilen in Bruchstreifen, die später erneut aufgegriffen wird. Aufgabe bereitet operativ Erfahrung vor, dass der Zähler die Anzahl der Stücke *zählt* (siehe c)).

Typische Schwierigkeit: Lernende, die Fördereinheit 1 nicht bearbeitet haben, deuten Anteile möglicherweise als „Zähler steht für die Anzahl der Kuchen, die verteilt werden und Nenner steht für die Anzahl der Kinder, die ihn sich teilen.“ (*Interpretation 1* unter *Lerninhalt*). Sie deuten hier „1 Schokoriegel wird an 5 Kinder verteilt. Welchen Anteil bekommt jedes Kind?“. Dann 1.3 bearbeiten, um hier genutzte *Interpretation 2* zu erarbeiten.

Zu beachten: Bruchstreifen im letzten Bild hat 6 Stücke, dies kann leicht übersehen werden.

Methode: Begriffe aus 1.3 für 3/5 (d.h. Nicht-Stammbruch) mithilfe der Karten thematisieren. Ggf. 1.3 wiederholend bearbeiten.

Lösung: Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Stücke man den Schokoriegel schneidet – hier 5. Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke an, die man bekommt – hier 3. Die Bezeichnung passt, weil der Zähler die Stücke *zählt*.

2.1 Einen größeren Teil vom Ganzen bekommen

a) Emily hat großen Hunger:
 Sie nimmt sich direkt mehrere Stücke vom Kuchen.
 Welchen Anteil vom Kuchen hat sie gegessen?



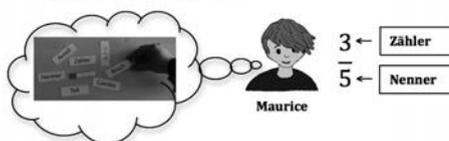
b) Welchen Anteil vom Schokoriegel bekommt Tim?

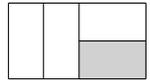


Ergänze die Tabelle.

So viele Stücke hat der ganze Riegel:	Diesen Teil, also so viele gleich große Stücke, bekommt Tim:	Bild. Das bekommt Tim:	Tims Anteil vom Schokoriegel:
5	1		$\frac{1}{5}$
5	2		$\frac{2}{5}$
5	3		$\frac{3}{5}$
5	4		$\frac{4}{5}$
5	5		$\frac{5}{5}$
6	4		$\frac{4}{6}$

c) Erkläre den Anteil $\frac{3}{5}$ mit dem Schokoriegel.
 Warum passt die Bezeichnung „Zähler“?





2.2 Üben (5 - 10 Minuten)

Ziel: Nicht-Stammbüche darstellen und Muster erkennen können

Material: -

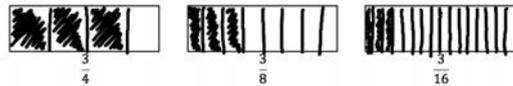
Umsetzung: EA, dann UG

Impuls: Zeichnungsgenauigkeiten ansprechen, aber Verständnis unterordnen.

Lösung: An den Brüchen und Bildern zu sehen: Ganzes bleibt gleich, Zähler bleibt gleich, Nenner wird größer (nämlich immer doppelt so groß), d.h. Anteil wird kleiner, Teil wird kleiner, es sind immer 3 Stücke markiert.

2.2 Anteile einzeichnen

Zeichne für jedes Ganze den Anteil ein. Vergleiche die Bilder miteinander.



2.3 - 2.4 Üben (20 - 35 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Anteile ablesen; Muster erkennen und weiterführen; Erkennen, dass der gleiche Anteil unterschiedlich aussehen kann

Material: -

Umsetzung: 2.3 a), b) jeweils EA, dann UG; c) Aufgabengenerator (PA); 2.4 jeweils EA, dann PA

Hilfestellung: Lernende erst auffordern, alles zu beschreiben, was sie erkennen, dann Impuls: Was verändert sich vom 1. zum 2. / vom 2. zum 3. Bild?

Lösung: Operatives Muster: Ganzes wird größer, Teil bleibt gleich, Anteil wird kleiner.

Lösung: Operatives Muster: Zähler wird immer um 1 größer, Nenner wird um 2 größer, Anteil wird größer, doch wenn das Ganze unterschiedlich ist, kann man auch über den Teil nichts sagen.

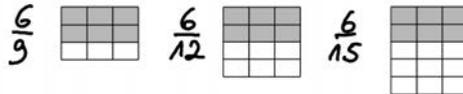
Zu beachten: Qualität des Prozesses sicherstellen, wenn Lernende sich oder andere überfordern. Falls keine Ideen, Muster aus anderen Teilaufgaben aufgreifen.

Impuls: Warum sind die Anteile gleich, obwohl die Bilder so unterschiedlich aussehen? → Die Ganzen sind zwar unterschiedlich groß, aber sind alle in 6 gleich große Stücke eingeteilt und zwei davon sind gefärbt, also immer 2/6.

Weitere Aufgabe: Ggf. Bild ergänzen, bei dem der Teil nicht selbst unterteilt ist (Anknüpfend an 1.6 und vorbereitend für 2.6).

2.3 Anteile ablesen I

a) Lies die Anteile ab. Vergleiche die Anteile. Was fällt dir auf?



b) Lies die Anteile ab. Findest du hier auch ein Muster? Ergänze ein viertes Bild.



c) Eine Person stellt eine Aufgabe wie in a) oder b), die andere löst sie. Wechselt euch ab.

2.4 Anteile ablesen II

a) Lies die Anteile ab. Was stellst du fest?

Es ist immer derselbe.



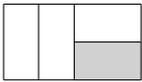
b) Was ist an $\frac{2}{6}$ immer gleich, auch wenn das Bild dazu anders aussehen kann? Beschreibe die Bilder.



Der Teil lässt sich in 3 gleich große Stücke zerlegen. Jedes dieser Stücke passt 4mal in das Ganze.

c) Finde selbst drei verschiedene Bilder zum Anteil $\frac{2}{6}$.





Handreichungen – Baustein B1 A
 Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen

2.5 Erarbeiten (5 - 10 Minuten)

Ziel: Bedeutung der Größe der Stücke erfassen

Material: -

Umsetzung: EA, dann UG

Impuls: Wie hast du die Aufgabe gelöst? Sind auch andere Einteilungen möglich?

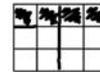
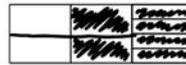
Zu beachten: Bei Schwierigkeiten Aufgabe 2.6 vorziehen. Alternative Strukturierungen thematisieren. Fragen, ob für den Anteil auch zwei große und zwei kleine Stücke markiert werden können.

2.5 Verschiedene Teile zusammenfassen

Jonas und Emily bekommen jeweils etwas von einem Kuchen geschenkt. Markiere den Teil, den sie bekommen, so dass der Anteil passt.

Jonas bekommt $\frac{4}{6}$ vom Kuchen.

Emily bekommt $\frac{4}{12}$ vom Kuchen.



2.6 Erarbeiten (20 - 30 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)

Ziel: Anteile als Beziehung zwischen Teil und Ganzem deuten; Verstehen, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Größe der Stücke ankommt; Komplexere Anteile in Bildern bestimmen lernen

Material: MB: Bruchpuzzle, Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c) UG; d) Aufgabengenerator (PA)

Hilfestellung: Bedeutung von Nenner und Zähler thematisieren (siehe 2.1), dann für Strategien auf 1.6 zurückgreifen. Auch nach alternativen Strukturierungen zum Erkennen des Anteils fragen.

Zu beachten: Mit dem Puzzle kann man alle Bilder nachlegen. Die Bilder (4) bis (7) werden ohne Grundfläche gelegt: Variation und Systematisierung der Strategie des geeigneten Strukturierens. Es können in (4) bis (7) Anteile für beide Puzzle-Stücke angegeben werden.

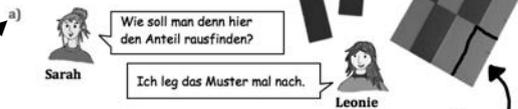
Impuls: Wie oft passt Stück X in Stück Y? Wie oft passt es dann in die Grundfläche / das Ganze?

Methode: Die Strukturierung wird mit Folienstiften auf die Puzzle-Grundfläche gezeichnet. Dabei helfen die Markierungen zur Orientierung. Die Lernenden versuchen durch Auslegen der Fläche, den Anteil zu bestimmen.

Zu beachten: Das Bild wird hier vergrößert betrachtet (d.h. Leonie sieht $\frac{1}{3}$ und nicht $\frac{3}{9}$). Ggf. als Hilfe Anteil $\frac{3}{9}$ zusätzlich zu $\frac{1}{3}$ thematisieren, systematisch wird Erweitern / Kürzen in **B2 A** / **B2 B** erarbeitet.

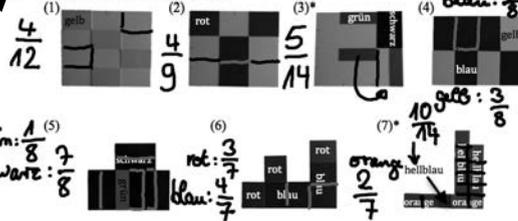
Methode: Eigene Aufgaben können sowohl mit der Puzzle-Grundfläche als auch ohne diese gelegt werden. Die Puzzle-Grundfläche kann auch mit Folienstiften geeignet strukturiert werden.

2.6 Anteile herausfinden

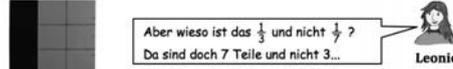


Hilf Sarah und Leonie, den Anteil herauszufinden. Wie gehst du vor? $\frac{3}{8}$

b) Bestimme auch hier die Anteile.

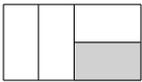


c) Leonie wundert sich über das Bild:



Was meint Leonie? Worauf muss man beim Anteile-Bestimmen achten?

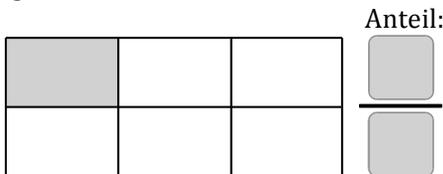
d) Legt euch selbst ähnliche Bilder und löst sie gegenseitig.



Kann ich Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen?

1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

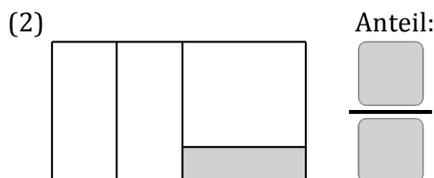
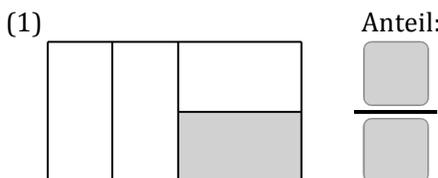
a) Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



b) Zeichne den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt.



c) Gib den Anteil für den grauen Teil an.



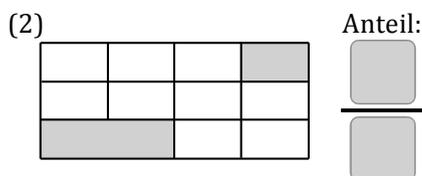
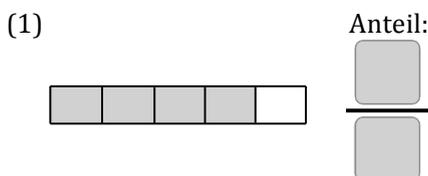
d) Erkläre deine Lösung zum Bild c) (2):

s



2 Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib jeweils den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



b) Erkläre deine Lösung zu Bild a) (2):

c) Zeichne für beide Bilder den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt.

