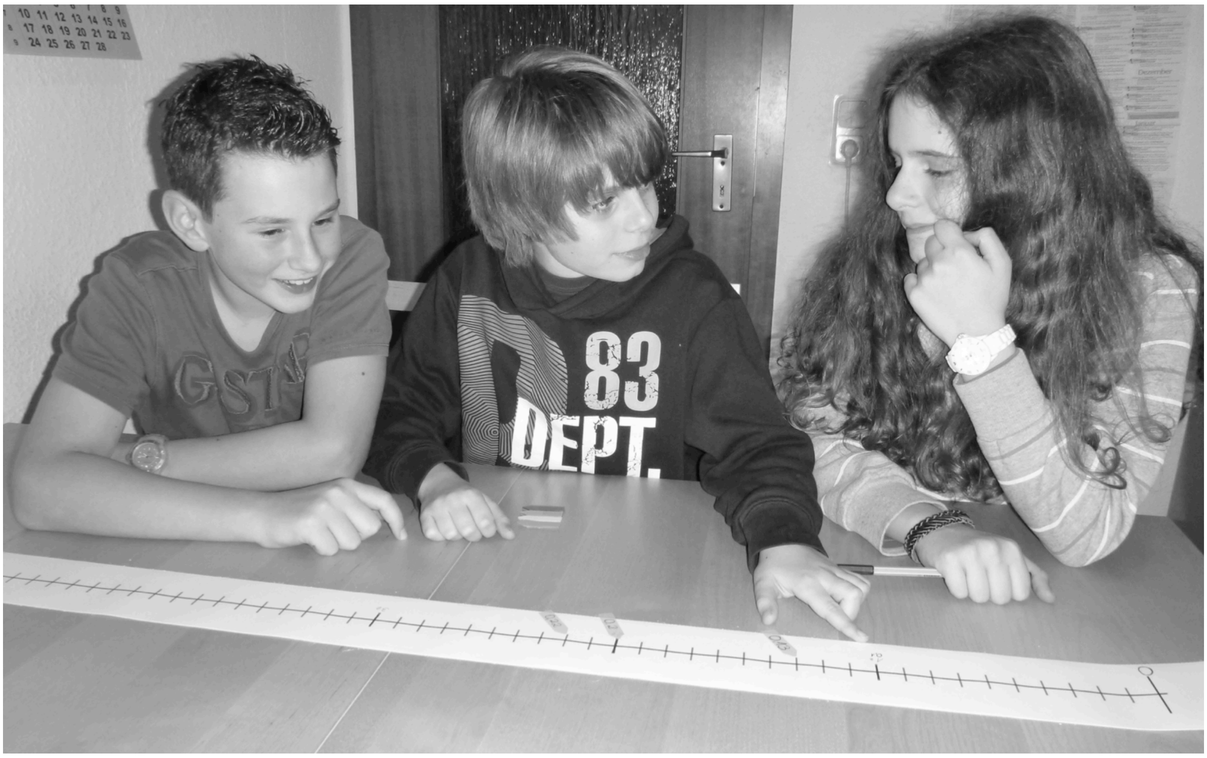
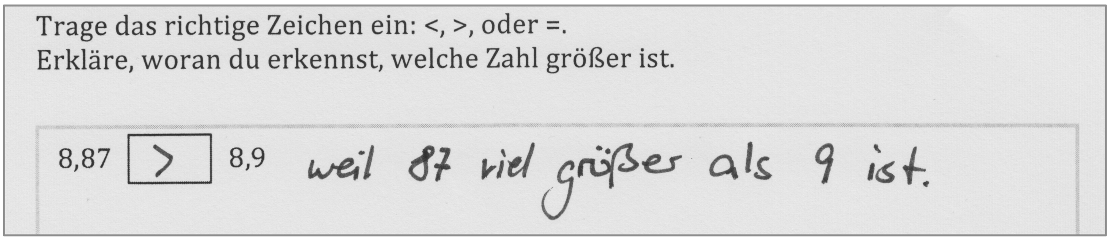



# Von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalzahlen, nicht immer ein einfacher Weg!

**Corinna Mosandl & Lara Sprenger**

**Manuskriptfassung eines Artikeld aus PM – Heft 56 (56), April 2014, 16-21**

*Bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Dezimalzahlen zeigen sich kritische Stellen im Lernprozess, die einigen Lernenden Schwierigkeiten bereiten. Diese sind nicht allein durch die stofflichen Anforderungen der Dezimalzahlen, sondern oftmals auch durch ein nicht tragfähiges Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen zu erklären. In dem Artikel werden exemplarisch Schwierigkeiten mit dem Dezimalzahlverständnis beschrieben, diagnostische Aufgaben, sowie eine diagnosegeleitete Förderung dazu vorgestellt.*


Trage das richtige Zeichen ein: <, >, oder =.
Erkläre, woran du erkennst, welche Zahl größer ist.

8,87 $\boxed{>}$ 8,9 weil 87 viel größer als 9 ist.

***Abb. 1: Schülerlösung zum Zahlvergleich bei Dezimalzahlen***

Maurice sagt: „8,9 ist kleiner als 8,87. Ich schaue mir die Zahlen nach dem Komma an und da ist 87 ja viel größer als 9.“ *(Abb. 1)*

Diese Idee, die im Laufe eines diagnostischen Gespräches formuliert wurde, weist auf typische Schwierigkeiten im Umgang mit dem Komma hin, die bei Schülerinnen und Schülern nicht ungewöhnlich ist: Bei der Interpretation von Dezimalzahlen im Kontext von Größen tritt nicht selten die Vorstellung auf, das Komma trenne Einheiten (z. B. das Komma trennt Euro und Cent) (vgl. Padberg 2009, S. 173). Diese Idee ist im Kontext von Geldwerten sicherlich nachvollziehbar, da 87 Cent tatsächlich mehr als 9 Cent sind; die 9 werden dann allerdings fälschlicherweise als 9 Cent anstelle von 90 Cent gedeutet. Die Ursache für die Antwort von Maurice kann aber auch in seinem Verständnis der Stellenwerte liegen, wenn eine nicht tragfähige Vorgehensweise zum Zahlvergleich im Bereich der natürlichen Zahlen auf die Dezimalzahlen übertragen wurde: Schülerinnen und Schüler der Grundschule vergleichen in der Regel zwei natürliche Zahlen entweder ziffernweise von links nach rechts oder identifizieren die größere Zahl über die Anzahl der vorhandenen Stellen. Diese Vergleichsverfahren sind, auch wenn sie im Bereich der natürlichen Zahlen funktionieren, schematischer Natur.

Für ein tragfähiges Zahlverständnis ist es bedeutsam, dass die Schülerinnen und Schüler inhaltliche Vorstellungen aufbauen, um den Transfer in andere Zahlbereiche erfolgreich bewältigen zu können. Gerade schwächere Schülerinnen und Schüler haben sich möglicherweise bereits in der Grundschule solcherlei schematische Abläufe und Vorgehensweisen zum Zahlvergleich angeeignet, ohne die Einsichten in die dekadischen Strukturen des Stellenwertverständnisses wirklich durchdrungen zu haben (vgl. Mosandl/Nührenbörger, 2014). Ein Strukturwissen über den allgemeinen Aufbau von Zahlen - also über den Bereich der natürlichen Zahlen hinausgehend - ist jedoch Voraussetzung dafür, Zahlvergleiche wie im Beispiel adäquat ausführen zu können. Zu diesem Strukturwissen gehört u. a. das dekadische Stellenwertprinzip soweit verstanden zu haben, dass der Übertrag auf die erweiterten Stellen der Dezimalzahlen entsprechend gelingen kann. „Beim Vergleich von zwei oder mehr Dezimalzahlen gilt der Vergleich der natürlichen Zahlen links vom Komma als tragfähiges Vorgehen. Gibt es hier keinen Unterschied, wird nach dem Komma ziffernweise von links nach rechts (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw.) verglichen, bis zwei unterschiedliche Ziffern auftauchen. Die Dezimalzahl mit der größeren Ziffer an dieser Stelle ist die größere Zahl. Anders als bei den natürlichen Zahlen ermöglicht die Anzahl der Stellen nach dem Komma und auch die Gesamtzahl der Stellen bei Dezimalzahlen keinen Rückschluss auf die Größe der Zahl" (Sprenger/Hußmann 2014, S. 122). Damit der dargestellte stellenweise Vergleich der Zahlen nicht auf schematischer Ebene bleibt, sondern die Schülerinnen und Schüler diesen auch inhaltlich verstehen und erklären können (z. B. warum zuerst die Zehntel und dann die Hundertstel miteinander verglichen werden), ist also die Einsicht in die Anordnung der Stellenwerte und ein Verständnis der strukturellen dekadischen Zusammenhänge unumgänglich.

Ein nicht ausgeprägtes Stellenwertverständnis führt oftmals auch zu Schwierigkeiten beim Aufbau eines inhaltlich gestützten Operationsverständnisses: Der flexible Einsatz von, je nach Aufgabe, angemessenen Rechenverfahren und der Transfer von symbolischen Zahlensätzen z. B. in Bilder oder Rechengeschichten erfordert grundlegende dekadische Einsichten. Fehlen diese aber, kann auch das Rechnen mit Dezimalzahlen oft nur schematisch vollzogen werden. Zwar können dann Aufgaben der Art 1,34 + 2,52 durchaus richtig gelöst werden, allerdings können sich bei Aufgaben des Typs 1,5 + 2,03 Fehler zeigen und z. B. 3,8 als Lösung notiert werden. Ähnliches kann in verschärfter Weise bei der Multiplikation und Division beobachtet werden, wo ein inhaltliches Operationsverständnis bei vielen Lernenden meist ganz fehlt, was zu einer hohen Fehlerquelle beim Bearbeiten von Aufgaben in diesem Bereich führen kann (vgl. Padberg 2009; Heckmann 2006).

Werden solche Schwierigkeiten beim Umgang mit Dezimalzahlen diagnostiziert, erfordern diese eine Förderung der basalen dekadischen Hintergründe. Anders formuliert: Wenn das Hauptaugenmerk des mathematischen Unterrichts nicht nur auf der schnellen Vermittlung von Verfahren liegen soll, bedarf es eines „verstehensorientierten“ Aufbaus des dezimalen Stellenwertverständnisses (vgl. Marxer/Wittmann 2012). Es stellt sich demnach die Frage, wie Lehrkräfte bei der Erarbeitung der Dezimalzahlen im Unterricht einerseits das Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen festigen können und wie, darauf aufbauend, andererseits eine tragfähige Erweiterung für die Dezimalzahlen aussehen kann.

Im Projekt „Mathe sicher können“ wurden Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt, die Schülerinnen und Schülern mit Schwierigkeiten im Fach Mathematik ein in dieser Hinsicht sinnstiftendes Lernen ermöglichen sollen. Die Entwicklung dieser Materialien richtet sich dabei nach drei konzeptionellen Leitideen (s. Basisartikel im vorliegenden Heft):

Im Sinne der *Diagnosegeleitetheit* werden Kenntnisse und Vorstellungen der Lernenden mittels Standortbestimmungen erhoben, um diese daran anschließend gezielt zu fördern. Die *Verstehensorientierung* beinhaltet, dass sich nachhaltiges und sinnstiftendes Lernen am Aufbau von Verständnis orientiert. Dies integriert den Rückbezug auf motivierende außermathematische Kontexte und vor allem auf strukturelle, innermathematische Vorstellungen und Darstellungen. Mit *Kommunikationsförderung* ist gemeint, dass Sprachproduktion und -rezeption der Lernenden gezielt aktiviert und gefördert werden, sodass Sprache zum Medium mathematischen Denkens und Handelns für alle Schülerinnen und Schüler wird.

Im Folgenden wird zunächst aufgezeigt, wie der Lerngegenstand Dezimalzahlen durch Kompetenzformulierungen und Bausteine strukturiert ist, und daran anschließend exemplarisch, wie eine Diagnose zum Dezimalzahlverständnis und dazu passende Förderimpulse im Unterricht eingesetzt werden können.

**Strukturierung des Lerngegenstandes**

Bei der Entwicklung des Diagnose- und Fördermaterials des Projektes „Mathe sicher können“ wurde besonderer Wert darauf gelegt, dass sowohl das Zahl- als auch das Operationsverständnis über die Zahlbereiche hinweg thematisiert und inhaltlich unterstützt werden können. Das bedeutet, dass beispielsweise das Stellenwertverständnis für die natürlichen Zahlen so (wieder-)erarbeitet werden kann, dass es für die Erweiterung auf den Bereich der Dezimalzahlen nutzbar ist (vgl. Mosandl/Nührenbörger 2014; Sprenger/Hußmann 2014). Ebenso kann bei der Erarbeitung des Dezimalzahlverständnisses auf die thematisierten Strukturen der natürlichen Zahlen zurückgegriffen werden. Der enge Zusammenhang der Zahlbereiche wird auch im analogen Aufbau der Strukturierung der Bausteine für das Zahlverständnis und das Dezimalzahlverständnis deutlich *(Abb. 2).*

| Natürliche Zahlen<br>Zahlverständnis | Brüche, Prozente, Dezimalzahlen<br>Dezimalzahlverständnis |
|---|---|
| **Baustein 1: Stellenwerte verstehen**<br>• Ich kann Zahlen mit Material lesen und darstellen.<br>• Ich kann bündeln und entbündeln. | **Baustein 1: Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen**<br>• Ich kann Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen. |
| **Baustein 2: Zahlen ordnen und vergleichen**<br>• Ich kann Zahlen am Zahlenstrahl lesen und darstellen.<br>• Ich kann Zahlen miteinander vergleichen und der Größe nach ordnen.<br>• Ich kann zu Zahlen Nachbarzahlen (Einer, Zehner, Hunderter, …) angeben und in Schritten zählen. | **Baustein 2: Dezimalzahlen ordnen und vergleichen**<br>• Ich kann zu Dezimalzahlen Nachbarzahlen angeben und in Schritten zählen.<br>• Ich kann Dezimalzahlen miteinander vergleichen und der Größe nach ordnen. |

***Abb. 2: Struktur der Förderbausteine zum Zahl- und Dezimalzahlverständnis***

Unter der Kompetenzformulierung „Ich kann Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen“ werden der Umgang mit Anschauungsmaterialien (Stellenwerttafel und Zahlenstrahl) und das Verständnis der dekadischen Strukturen, die diesen zugrunde liegen, zusammengefasst. Des Weiteren werden das Bündeln und Entbündeln von Stellenwerten sowie das immer feinere oder gröbere Darstellen von Zahlen am Zahlenstrahl zum Thema gemacht.
Daneben ist eine Grundorientierung im Zahlenraum bedeutsam, die einerseits eindeutige Größenvergleiche zulässt, andererseits mehrdeutige Anordnungen von Nachbarzahlen beinhaltet. Dazu gehört beispielsweise, dass man Aussagen über die Lage einer Zahl z. B. am Zahlenstrahl treffen und/oder Nachbarzahlen in Relation zur Nachkommastelle angeben kann. Diese Lerninhalte werden in verschiedenen Kompetenzformulierungen in den Fokus gestellt und jeweils in Diagnose- und Fördermaterialien umgesetzt.

**Stellenwerttafel und Zahlenstrahl als Anschauungsmittel nutzen**
Für ein grundlegendes Zahlverständnis ist die Darstellung von Zahlen in der Stellenwerttafel hilfreich, da sie die dekadischen Strukturen unseres Zahlsystems verdeutlicht *(Abb. 3)* und daher in beiden Zahlbereichen zur Veranschaulichung verwendet wird. Für den Umgang mit den Dezimalzahlen können viele Charakteristika der Stellenwerttafel aus den natürlichen Zahlen übernommen werden; dennoch ist es wichtig auch die Unterschiede herauszustellen, um Ähnlichkeiten wie ähnlich klingenden Stellenwerten (z. B. ein Zehner vs. ein Zehntel) oder dem Aufbau der erweiterten Stellenwerttafel (Symmetrie zur Einer-Spalte und nicht zum Komma) adäquat begegnen zu können (vgl. Padberg 2009, S. 167).

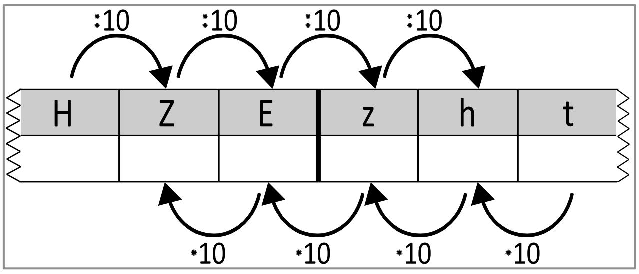


***Abb. 3: Die dekadische Struktur der erweiterten Stellenwerttafel (vgl. Sprenger/Hußmann2014)***

Des Weiteren ist der Zahlenstrahl, der ggf. abschnittsweise vergrößert werden kann, ein zentrales Darstellungsmittel *(Abb. 4)*. Die Vorstellung, dass Zahlen am Zahlenstrahl immer feiner dargestellt werden können und dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele andere liegen, wird auch schon in den natürlichen Zahlen angesprochen und erarbeitet. Beispielsweise können einzelne Bereiche des Zahlenstrahls symbolisch mit einer Lupe vergrößert werden, um die Zahlen dazwischen sehen bzw. eintragen zu können (vgl. Mosandl/Nührenbörger 2014).
Im Zusammenhang mit der inhaltlichen Bedeutung der Stellenwerte heißt das, dass zwischen zwei Zehnteln sowohl zehn Hundertstel als auch hundert Tausendstel etc. liegen. Denn wenn ein Zehntel eins von zehn gleich großen Teilen ist, die in einen Einer passen, und ein Hundertstel eins von hundert gleich großen Teilen ist, die in die gleiche Ausgangsgröße (einen Einer) passen, dann wird dadurch anschaulich, dass ein Zehntel zehnmal größer als ein Hundertstel sein muss. So erklärt sich der Unterschied zu den Begrifflichkeiten in den natürlichen Zahlen: Hier passen zehn Zehner in einen Hunderter. Diese Vorstellung kann mit einem durch eine Lupe symbolisiertes Vergrößern bzw. Hineinzoomen in den Zahlenstrahl gut veranschaulicht werden *(Abb. 4)*. In diesem Sinne können am Zahlenstrahl die Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten und somit die dekadische Struktur

anschaulich dargestellt werden und ergänzt außerdem abstrakte dekadische Vorstellungen, die im Zusammenhang mit der Stellenwerttafel aufgebaut worden sind (vgl. Sprenger/Hußmann, 2014).

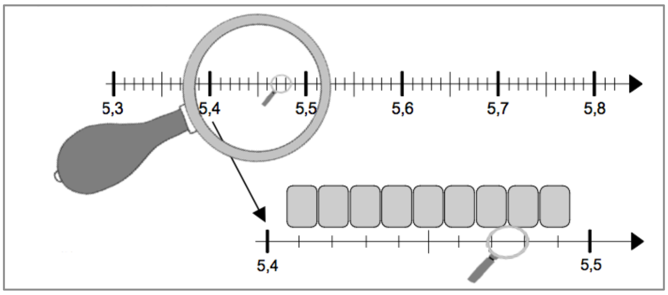
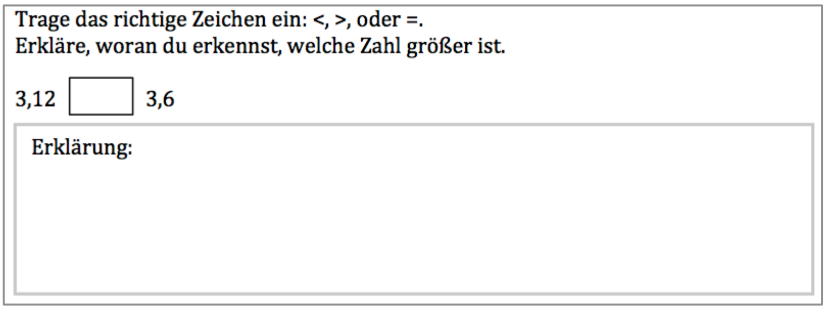



***Abb. 4: Zoomfunktion am Zahlenstrahl (vgl. Sprenger/Hußmann2014)***

Die Arbeit mit den Anschauungsmitteln Stellenwerttafel und Zahlenstrahl ist also für einen verstehensorientierten Vorstellungsaufbau von großer Bedeutung, um Zusammenhänge und Strukturen inhaltlich zu stützen und anschaulich darstellen zu können. So unterstützt der Zahlenstrahl beispielsweise die Vorstellung der ordinalen Position der Dezimalzahlen. Somit bauen die Schülerinnen und Schüler keine getrennten gestützten Vorstellungen über natürliche Zahlen und Dezimalzahlen auf, sondern erkennen, dass diese durchaus auf dem gleichen Zahlenstrahl liegen − eine Erkenntnis, die für einige Lernende durchaus nicht trivial ist. Die Stellenwerttafel bietet wiederum die Möglichkeit die Einsicht in den mathematischen Aufbau unseres Zahlsystems aus den natürlichen Zahlen anschaulich auf die Dezimalzahlen zu übertragen. Beide Anschauungsmittel geben den Lernenden Anlass über diese Strukturen ins Gespräch zu kommen und sich über ihre Vorstellungen auszutauschen.
Allerdings können diese Veranschaulichungen zunächst durchaus spezifische Lernhürden mit sich bringen und müssen in ihrer Funktion erst einmal verstanden werden. So sollten beispielsweise beim Zahlenstrahl die Bedeutung der einzelnen skalierenden Striche geklärt sowie Vorgehensweisen zur Orientierung (z. B.: In welchem Zahlenraum befindet man sich gerade? Wie kann ich eine Zahl am Zahlenstrahl eintragen?) thematisiert werden. Die Stellenwerttafel darf wiederum nicht als andere Form der Zifferndarstellung gesehen werden, sondern greift die multiplikative Struktur des Stellenwertsystems auf und gibt Auskunft über die Anzahl der jeweiligen Bündel an einer Stelle, die man ggf. in eine Zifferndarstellung der Zahl übersetzen muss. Die gemeinsame Arbeit mit den Lernenden an den Materialien kann ihnen helfen, diese Hürden zu überwinden und durch die Handlungen gleichzeitig tragfähige Vorstellungen aufzubauen.

**Diagnose des Dezimalzahlverständnisses**

Bei der Erstellung von Diagnosematerialien zur Lernstandsermittlung geht es im Projekt „Mathe sicher können“ darum, die individuellen Denkweisen der Schülerinnen und Schüler anhand ihrer Lösungswege und Erläuterungen zu erheben. Hierbei wurde bewusst der Fokus weniger darauf gerichtet, zu beurteilen, ob eine Lösung richtig oder falsch ist, sondern vielmehr darauf, eine differenzierte Analyse auftretender Fehler und ihrer möglichen Ursachen anzuregen (vgl. Scherer/Moser-Opitz 2010). *Abb. 5* zeigt hierzu eine Diagnoseaufgabe zum Zahlvergleich von Dezimalzahlen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Nachkommastellen, die eine Erklärung einfordert und so Aufschluss über individuelle Vorgehensweisen liefern kann.


Trage das richtige Zeichen ein: <, >, oder =.
Erkläre, woran du erkennst, welche Zahl größer ist.

3,12 ☐ 3,6

Erklärung:

***Abb. 5: Diagnoseaufgabe zum Zahlvergleich von Dezimalzahlen***

Für die Lösung einer derartig offen gestalteten Aufgabe sind *verschiedene* Herangehensweisen vorstellbar und tragfähig. Es kann zum einen der Zahlenstrahl aktiviert werden und über die Lage der Zahlen eine Aussage über deren Größe getroffen werden: Die Zahl, die weiter rechts am Zahlenstrahl liegt, ist die Größere. Des Weiteren kann von den Lernenden ein alltagsnaher Kontext (z. B. Geld) aktiviert werden, sodass 3,12 € und 3,60 € verglichen werden. Denkbar ist aber auch die Vorstellung der Stellenwerttafel und somit ein stellenweises Vorgehen beim Vergleich der Zahlen. Dazu müssen aber die Bedeutungen der verschiedenen Stellen der einzelnen Dezimalzahlen verstanden sein, damit die richtigen Stellen miteinander verglichen werden und somit eine Aussage über die größere oder kleinere Zahl getroffen werden kann. Um zu wissen, dass z. B. in der Zahl 3,12 die Ziffer „3" drei Einer, die „1" ein Zehntel und die „2" zwei Hundertstel repräsentieren, müssen die Lernenden sowohl den Stellenwert der Ziffer (Position der einzelnen Ziffer in der Zahl) als auch deren Wert (Anzahl der Bündel an der jeweiligen Stelle) kennen und bestimmen können. Viele Schülerinnen und Schüler fassen die Ziffern nach dem Komma als natürliche Zahl auf, sodass sie die 3,6 als kleinere Zahl identifizieren, mit der Begründung, dass 6 kleiner als 12 sei. Eine weitere Fehlvorstellung ist die Betrachtung der Dezimalzahlen als natürliche Zahlen, wobei das Komma einfach unberücksichtigt bleibt. Auch hier wird die 3,12 für größer gehalten, da 312 schließlich auch größer als 36 ist.
Wenn Fehler dieser Art beim Zahlvergleich sichtbar werden, sollte überprüft werden, ob ein Verständnis der Stellenwerte aufgearbeitet werden muss. Eine weitere mögliche Diagnoseaufgabe dazu wird in Abb. 6 dargestellt. An dieser Stelle würden die Schülerinnen und Schüler mit einem unzureichenden Stellenwertverständnis ähnliche Fehler wie beim Zahlvergleich zeigen. Sie fassen die Ziffern nach dem Komma als natürliche Zahl auf, identifizieren die Hundertstel analog zu den Hundertern als dritte Stelle von rechts und kreisen deshalb die erste „3" nach dem Komma ein *(Abb. 6)*. Ebenfalls denkbar ist die Interpretation der Zahl 4,335 ohne Komma als 4 335. Auch hier werden die Hundertstel analog zu den Hundertern (vgl. Padberg, 2009, S. 164) als dritte Stelle von rechts (im konkreten Beispiel die erste Stelle nach dem Komma) gesehen.

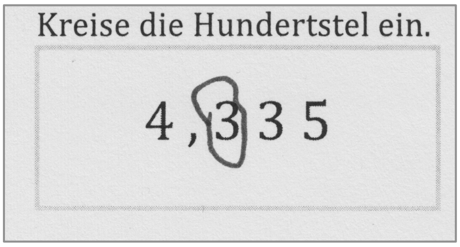



***Abb. 6: Schülerlösung zu einer Diagnoseaufgabe zum Dezimalzahlverständnis***

Die Beispiele zeigen, dass für ein verständnisbasiertes Operieren und Umgehen mit Dezimalzahlen, ein grundlegendes Verständnis der dekadischen Strukturen unabdingbar ist. Nach dem Blick auf die

Diagnose stellt sich nun die Frage, welche Förderimpulse gebraucht werden, um ein inhaltlich gestütztes Dezimalzahlverständnis aufzubauen.

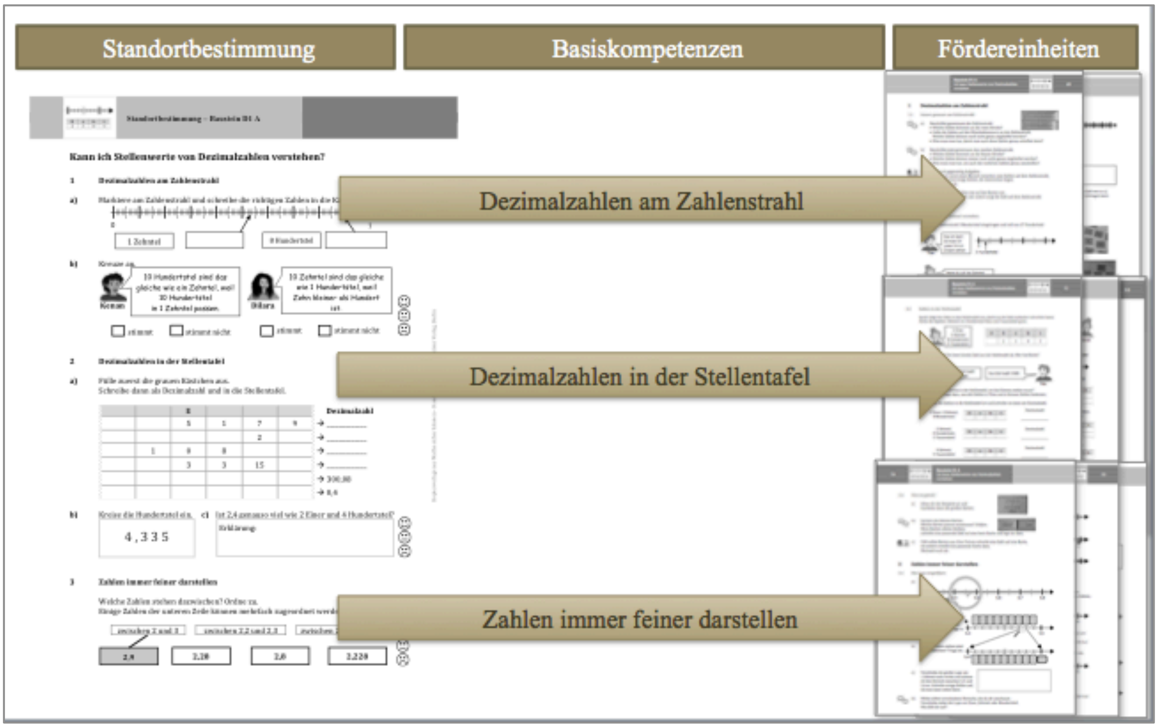
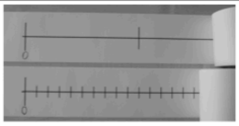



*Abb. 7: Zusammenhang zwischen Diagnose und Förderung*

**Diagnosegeleitete Förderung zum Dezimalzahlverständnis**

Im Sinne einer handlungsleitenden Diagnostik wurden die Fördermaterialien so konzipiert, dass sich aus den Diagnoseaufgaben entsprechende Förderimpulse direkt ableiten lassen *(Abb. 7)*. Für eine grundlegende und verstehensorientierte (Wieder-)Erarbeitung wird ein Zugang durch die Arbeit mit geeigneten Anschauungsmaterialien (siehe oben) und einführenden Orientierungsübungen geschaffen. So soll sich für die Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Förderung durch das Handeln am Zahlenstrahl die inhaltliche Bedeutung der einzelnen Stellen der Dezimalzahl klären *(Abb. 8)*. Dazu werden zunächst die Konzepte (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel) so erarbeitet, dass deren Bedeutung deutlich wird: Ein Zehntel ist eins von zehn gleich großen Teilen, die in einen Einer (ein Ganzes) passen. Analog ist ein Hundertstel eins von hundert gleich großen Teilen, die in einen Einer passen. Gerade bei schwächeren Schülerinnen und Schülern ist nicht davon auszugehen, dass sie diese Beziehung nun auf alle benachbarten Stellenwerte übertragen können. So werden beispielsweise auch die Verhältnisse zwischen Einer und Zehntel, Hundertstel und Tausendstel, etc. in der Förderung in gemeinsamen Unterrichtsgesprächen gezielt thematisiert und diskutiert, was durch die Sprechblasen am Rande der Aufgaben verdeutlicht wird *(Abb. 8)*. Diese Kommunikationsanlässe dienen dazu, den Austausch über individuelle Vorstellungen und Vorgehensweisen der Lernenden untereinander anzuregen und in diesem Sinne eine mathematische Kommunikationsförderung zu etablieren. Diese Phasen müssen von einer Lehrkraft begleitet und moderiert werden, um den Gesprächen die erforderliche fachliche Qualität und Tiefe zu geben (vgl. Prediger et al. 2014).

**1.1 Immer genauer am Zahlenstrahl**



a) Beschriftet gemeinsam den Zahlenstrahl.
- Welche Zahlen kommen an die roten Striche?
- Hefte die Zahlen an den Zahlenstrahl.
  Welche Zahlen können noch nicht genau angeheftet werden?
- Was muss man tun, damit man auch diese Zahlen genau anheften kann?

b) Beschriftet jetzt gemeinsam den zweiten Zahlenstrahl.
- Welche Zahlen kommen an die blauen Striche?
- Welche Zahlen können immer noch nicht genau angeheftet werden?
- Was muss man tun, um auch die restlichen Zahlen genau anzuheften?

***Abb. 8: Förderaufgabe zur Thematisierung der inhaltlichen Bedeutung der Stellenwerte (vgl. Sprenger / Hußmann 2014)***

Die Dezimalzahlen werden anfangs in einer inhaltlichen (z. B. „7 Zehntel“) und nicht gleich in einer formalen Sprechweise (z. B. 0,7) genutzt, um ein inhaltliches Verständnis des Zahlaufbaus und insbesondere der Stellenwerte anzulegen. Dabei werden die Zahlen zunächst in der maximalen Bündelung verwendet, d. h. es werden keine Bündelanzahlen größer 9 (wie z. B. „15 Zehntel“) vorgegeben. Damit kann der Förderfokus auf die inhaltliche Bedeutung und die Abfolge der Stellenwerte gelegt werden, sodass diese zunächst verstanden werden können. Im weiteren Verlauf werden zusätzlich nicht-standardisierte Bündelungen (z. B. „70 Hundertstel“) mit einbezogen. Auch dieser Schritt ist nicht für jeden Lernenden selbstverständlich. So stellt Boris bei der Arbeit am Zahlenstrahl erstaunt fest: „Oh, das [70 Hundertstel] muss ja dann auch hierhin [an die Stelle, wo 7 Zehntel angeheftet ist]. Dann ist das ja das Gleiche!“

Neben der Orientierung am Zahlenstrahl und der Klärung der Konzepte erfolgt in der Förderung auch die Erarbeitung der Dezimalzahlen in der Stellenwerttafel, um von der inhaltlichen Sprechweise verstehensorientiert zur üblichen formalen Darstellung (Kommaschreibweise) zu kommen. Hier wird besonderen Wert auf die Frage „Wo steht denn eigentlich das Komma und warum?“ gelegt, um den Lernenden eine Verstehensgrundlage zu bieten und das Komma eben nicht z. B. als Trennung zweier natürlicher Zahlen zu sehen. Ein weiterer wichtiger Aspekt der Förderung ist die immer feinere Darstellung von Zahlen und dahingehend die Anbahnung der Idee, dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele andere liegen. Hier erfolgt außerdem eine Anbindung an den Kontext, um den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, wo sie im Alltag Dezimalzahlen begegnen und wann eine immer feinere Darstellung Sinn macht. Wenn das Dezimalzahlverständnis in diesem Sinne aufgebaut ist, können sich weitere Inhalte wie z. B. der Zahlvergleich bei Dezimalzahlen anschließen.

Das eingangs genannte Problem zum Zahlvergleich wird in der Förderung sowohl am Zahlenstrahl als auch in der Stellenwerttafel thematisiert und reflektiert, sodass die potentielle Fehlinterpretation aus dem Beispiel oben einer inhaltlich gestützten Vorstellung zum Zahlvergleich am Zahlenstrahl weichen kann (*Abb. 9* und *10* zeigen exemplarisch Aufgaben, in denen typische Vorgehensweisen thematisiert werden). Ganz bewusst werden in der Förderung verschiedene Zugangsweisen gewählt, um einerseits den in der Diagnose erhobenen individuellen Vorgehensweisen gerecht zu werden. Andererseits stellen Zahlenstrahl und Stellenwerttafel zwei Anschauungsmittel auf dem Weg zur Ablösung dar. Der Zahlenstrahl macht den Größenvergleich visuell deutlich, während die Stellenwerttafel auf dem Weg zur Bewältigung des rein formalen Vergleichs den numerischen Blick stützt.

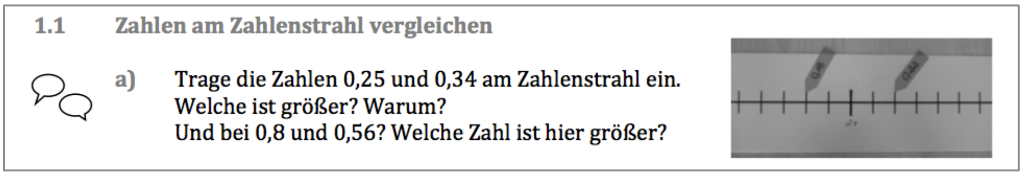


*Abb. 9: Förderaufgabe zum Größenvergleich von Dezimalzahlen am Zahlenstrahl (vgl. Sprenger/Hußmann 2014)*

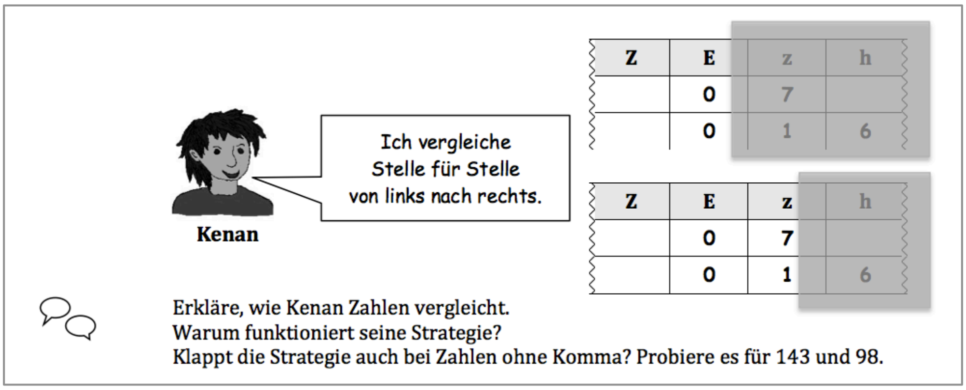


*Abb. 10: Förderaufgabe zum Größenvergleich von Dezimalzahlen in der Stellenwerttafel (vgl. Sprenger/Hußmann 2014)*

Mit Blick auf die Kommunikation der Lernenden untereinander sollen Herangehensweisen anderer Lernender nachvollzogen und diskutiert werden, auch wenn diese nicht tragfähige Vorstellungen enthalten. Damit Schülerinnen und Schüler lernen, Fehler als Bestandteile ihres Lernprozesses wahrzunehmen und diese zur Diskussion zu stellen, werden typische nicht adäquate Vorstellungen im Fördermaterial explizit angesprochen *(Abb. 11)*. Darüber hinaus regt die Auseinandersetzung mit Fehllösungen dazu an, die eigenen, oftmals impliziten Vorstellungen über dekadische Strukturen bewusst zu reflektieren, sodass Entscheidungen über Fehllösungen gezielt getroffen werden können.

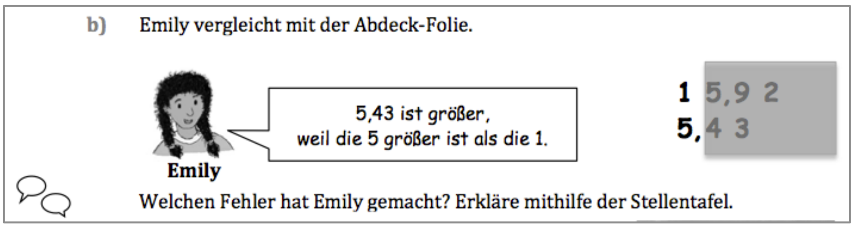


*Abb. 11: Förderaufgabe zur Thematisierung einer Fehlvorstellung (vgl. Sprenger/Hußmann 2014)*

**Fazit**

Nicht adäquate Vorstellungen, die sich in der Arbeit mit Dezimalzahlen zeigen, sind zunächst nicht ungewöhnlich für die Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern. Bevor sich diese aber im Laufe der Schulzeit zu schematischen Vorgehensweisen ausbauen, ist es wichtig, dass die Lernenden tragfähige inhaltliche Vorstellungen entwickeln. Es mag überraschen, doch gerade für die leistungsschwächeren Lernenden ist es unabdingbar, dass ihnen neben der Einübung von Verfahren auch Möglichkeiten zur Einsicht in Strukturen gegeben werden. Nur das Verständnis der zugrundeliegenden basalen Strukturen, beispielsweise des Stellenwertsystems, bietet ihnen die Grundlage für das Mathematiklernen in erweiterten Zahlbereichen. Eine gezielte Diagnose möglicher vorliegender Fehlvorstellungen sowie der Austausch über Vorstellungen und Vorgehensweisen kann diese Aufarbeitung unterstützen.

Die bisherigen Erfahrungen aus der Durchführung von Diagnose und Förderung zeigen, dass die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern an den grundlegenden mathematischen Basiskompetenzen zwar herausfordernd, aber auch sehr lohnenswert ist. Insbesondere das ständige Einbeziehen des durch die Kommunikationsanlässe initiierten Austausches untereinander, das Etablieren von Verständnisgrundlagen und die Thematisierung verschiedener Fehlvorstellungen können die Lernenden immer wieder zu neuen Sichtweisen auf den Lerngegenstand anregen. Als förderlich zeigte sich ein ausreichendes Zeitkontingent für die Bearbeitung der Aufgaben und die Bereitschaft sowohl der Lehrenden als auch der Lernenden, sich auf die Förderung und teils ungewohnte Aufgabenformate einzulassen. Ebenso erwies sich die Arbeit in Kleingruppen als gewinnbringend, da sich speziell die Formulierung eigener Ideen und Vorgehensweisen für einige Schülerinnen und Schüler anfangs als eine besonders herausfordernde Situation erwies. Umso erfreulicher war es, zu beobachten, wie die Schülerinnen und Schüler sich im Laufe der Förderbausteine weiterentwickelten und anfingen, sich in Erklärungen auf gelernte und thematisierte Zusammenhänge zu beziehen und so in ein fundiertes Gespräch über Mathematik kamen.

## Literatur


Häsel-Weide, Uta / Nührenbörger, Marcus (2013): Individuell fördern – Kompetenzen stärken. Fördern im Mathematikunterricht Klasse 3 & 4. In: Bartnitzky, Horst / Hecker, Ulrich / Lassek, Maresi (Hrsg.): Individuell fördern – Kompetenzen stärken. Grundschulverband, Frankfurt am Main

Heckmann, Kirsten (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Logos Verlag, Berlin

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2012): Den Stellenwerten eine Bedeutung geben. In: mathematik lehren (ml) (171), S. 44−48.

Mosandl, Corinna / Nührenbörger, Marcus (2014): Stellenwerte verstehen. In: Selter, Christoph / Prediger, Susanne / Nührenbörger, Marcus / Hußmann, Stephan (Hrsg.) (i. V. 2014): Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen. Cornelsen, Berlin, S. 21−66

Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum, Heidelberg

Prediger, Susanne / Selter, Christoph / Hußmann, Stephan / Nührenbörger, Marcus (Hrsg.) (i. V. 2014): Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente und Dezimalzahlen. Cornelsen, Berlin

Scherer, Petra / Moser-Opitz, Elisabeth (2010): Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Spektrum. Heidelberg

Scherer, Petra / Steinbring, Heinz (2004): Übergang von halbschriftlichen Rechenstrategien zu schriftlichen Algorithmen – Addition im Tausenderraum. In: Scherer, Petra / Bönig, Dagmar (Hrsg.): Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern. Grundschulverband, Frankfurt am Main, S. 163−173.

Sprenger, Lara / Hußmann, Stephan (2014): Dezimalzahlverständnis. In: Prediger, Susanne / Selter, Christoph / Hußmann, Stephan / Nührenbörger, Marcus (Hrsg.) (i. V. 2014): Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente und Dezimalzahlen. Cornelsen, Berlin, S. 101−155.


## Verfasserinnen


Corinna Mosandl und Lara Sprenger
Wissenschaftliche Mitarbeiterinnen des Instituts für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts der TU Dortmund

corinna.mosandl@math.tu-dortmund.de
lara.sprenger@math.tu-dortmund.de