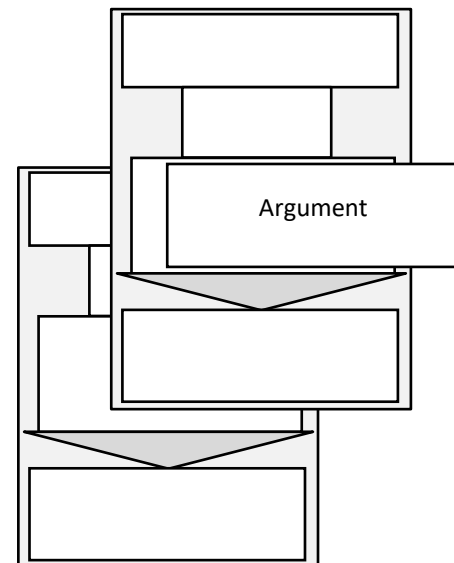


Didaktischer Kommentar zur  
Unterrichtseinheit für Mittel- und Oberstufe:

# Mathematisch Begründen

## – die Logik beim Herleiten von mathematischen Sätzen



Steckbrief zur Unterrichtseinheit:

<b>Klassenstufe</b>	8-13 (Empfehlung: nachdem die Lernenden Winkelsätze kennengelernt haben)
<b>Dauer</b>	6-7 Stunden
<b>Material</b>	Kopien der Vorlage „Argumentationsschritte“ und zusätzliche Blätter Papier zum Schreiben und Schere zum Ausschneiden Das Erklärvideo kann für Lernende unter <a href="http://sima.dzlm.de/um/8-001">sima.dzlm.de/um/8-001</a> heruntergeladen werden. Dafür den Videolink aufrufen und Rechtsklick „Video speichern unter“ nutzen. Entsprechend sind Laptops, PCs oder Tablets erforderlich, damit die Lernenden in Paaren/Kleingruppen mit den Videos arbeiten können.



Dieses Material wurde durch Kerstin Hein und Susanne Prediger konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz 4.0 International: BY-SA-NC: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen verwendet werden.

**Zitierbar als**

Hein, K. & Prediger, S. (2021). Mathematisch Begründen – die Logik vom Herleiten mathematischer Sätze. Didaktischer Kommentar zum sprach- und fachintegrierten Unterrichtsmaterial als Open Educational Resources: [sima.dzlm.de/um/8-001](http://sima.dzlm.de/um/8-001)

**Projektherkunft**

Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts MuM-Beweisen (gefördert durch die Stiftung der Deutschen Wirtschaft) unter der Projektleitung von Susanne Prediger. Es wurde weiter bearbeitet im Rahmen des Projekts FachBiSS des BiSS-Forschungsnetzwerks (BMBF-Förder-Kz. 01J12001E, Projektleitung S.Prediger).

**Bildrechte**

Alle Grafiken sind selbst erstellt von den Autorinnen.

## Worum geht es mathematisch? Verstehen der logischen Strukturen mathematischer Sätze

Für das Verstehen und Anwenden mathematischer Sätze ist langfristig das Verstehen logischer Strukturen notwendig. Die Unterrichtsreihe nutzt hierzu exemplarisch Winkelsätze, da sie lokal geordnet sind und auf folgende Weise abgeleitet werden können:

Ab Klasse 8 geht es um folgendes:

- Mathematische Sätze lesen und anwenden können
- Voraussetzungen und Schlussfolgerungen identifizieren und trennen

Darauf baut in der Oberstufe und in Vorbereitung aufs Studium folgendes auf, was hier nur angebahnt wird:

- Beweise mathematischer Sätze nachvollziehen können
- Kleine Beweise selbst führen können

## Identifizieren der sprachlichen Anforderungen in dem Themenfeld

Um mathematische Sätze verstehen zu können, muss deren logische Struktur wahrgenommen werden. Dafür muss der Unterschied zu Wenn-Dann-Sätzen aus dem Alltag wahrgenommen werden.

Fachliches (Teil-)Lernziel	Sprachhandlung und dazu notwendige Sprachmittel (wichtigste Satzbausteine kursiv gedruckt)
Wahrnehmen und Explikation von logischen Elementen	<b>Lesen von mathematischen Sätzen:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Scheitelwinkel <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> (<i>Voraussetzung</i>) sind immer gleich groß (<i>Schlussfolgerung</i>).</li> <li>• Die Winkel <math>\gamma</math> und <math>\alpha</math> an den parallelen Geraden <math>g</math> und <math>h</math> (<i>Voraussetzung</i>) sind gleich groß (<i>Schlussfolgerung</i>).</li> </ul>
Mathematische Sätze explizit verbalisieren	<b>Schreiben eigener mathematischer Sätze</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Explizite konditionale Bedingung: <i>Wenn..., dann...</i></li> </ul>
Logische Beziehungen zwischen Voraussetzung, Argument, Schlussfolgerung wahrnehmen und linear verbalisieren	<b>Schriftliche Versprachlichung von Anwendung und Herleitung mathematischer Sätze:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Logische Beziehung zwischen den logischen Elementen mit Konjunktionen explizieren: „<i>Weil</i> parallele Geraden vorliegen...“ „<i>Daher</i> sind die Winkel ...“</li> <li>• Mathematische Sätze einleiten und explizieren: „<i>Der Satz besagt, dass...</i>“</li> </ul>
<i>Langfristig:</i> Logische Strukturen sehen, verstehen und selbstständig anwenden	<b>Versprachlichung mit verdichtende Sprachmittel:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Anwendung eines Satzes: <i>Laut</i> dem ....-Satz gilt</li> <li>• Nominalisierung der mathematischen Sätze: Wechselwinkelsatz</li> </ul>

## Weiterführende Literatur

- Hein, K. (2020). Mathematische Sätze in ihren logischen Strukturen verstehen und anwenden lernen. In S. Prediger (Hrsg.). Sprachbildender Mathematikunterricht – Ein forschungsbasiertes Praxisbuch. Cornelsen: Berlin, S. 95-103.
- Prediger, S. (2018). Design-Research als fachdidaktisches Forschungsformat: Am Beispiel Auffalten und Verdichten mathematischer Strukturen. In Fachgruppe Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 33–40). Münster: WTM.

## Erläuterungen zum mathematischen Inhalt und Designelementen

### Mathematischer Inhalt

Die Winkelsätze wurden hier als einfacher mathematischer Inhalt gewählt, der einen intuitiven Zugang ermöglicht, mit denen hier aber ein Übergang zum formalen Beweisen angebahnt werden soll. Die Aufgaben orientieren sich an der lokalen Ordnung der Winkelsätze (siehe Abbildung 1). Um die Herleitung mathematischer Sätze vorzubereiten, werden vorab jeweils Aufgaben mit zu ermittelnden Winkelgrößen gestellt.

- Aufgabe 1 für die Herleitung des Nebenwinkelsatzes in Aufgabe 2
- Aufgabe 6 für die Herleitung des Scheitelwinkelsatzes in Aufgabe 7
- Aufgabe 10 für die Herleitung des Wechselwinkelsatzes in Aufgabe 12
- Aufgabe 15 für die Herleitung des Innenwinkelsummensatzes in Aufgabe 16

Nach der Einführung der graphischen Designelemente in **Teil A – Nutzen von Argumentations-schritten und Argumenten** (Aufgabe 1-7) können die Aufgaben 7, 12 und 16 auch ohne die vorbereitenden konkreten Anwendungsaufgaben gestellt werden.

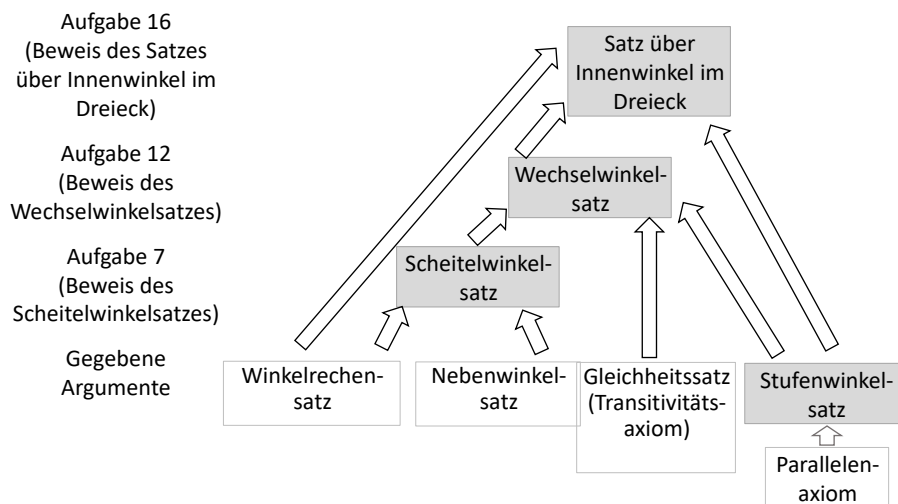


Abbildung 1: Lokale Ordnung der Sätze

## Graphisches Designelement als strukturierende Argumentationshilfe

Die graphischen Designelemente dienen dazu, die logischen Strukturen bei der Anwendung und Herleitung mathematischer Sätze wahrnehmbar zu machen. Sie helfen zu erkennen, dass mathematische Sätze immer aus einer Voraussetzung und einer Schlussfolgerung bestehen. Die Formulierung der mathematischen Sätze als WENN-DANN-Sätze verdeutlicht diese Struktur. In Aufgabe 3 wird die allgemeine Struktur mathematischer Sätze erläutert und mit alltäglichen WENN-DANN-Sätzen verglichen. Dabei wird insbesondere der strenge Gebrauch mathematischer Sätze deutlich, der sich vom alltäglichen Gebrauch unterscheidet.

Die im Material bewiesenen mathematischen Sätze können anschließend, wie Werkzeuge verwendet werden. Der Vergleich mit Werkzeugen bietet sich an, da die Verwendung von Werkzeugen analog zur Verwendung von mathematischen Sätzen eine Voraussetzung und eine Schlussfolgerung hat. Der Werkzeugkasten wird bei der Bearbeitung des Materials stetig erweitert. Abhängig von den Voraussetzungen in der Aufgabe muss das richtige Werkzeug ausgewählt werden.

Dazu werden in Aufgabe 4 die graphischen Argumentationsschritte erläutert. Sie verdeutlichen die generelle Argumentationsstruktur beim mathematischen Begründen. Durch das Ausfüllen sollen die Voraussetzungen, mathematische Sätze und Schlussfolgerung explizit voneinander getrennt werden. Ausgehend von den in der Aufgabe gegebenen Informationen (1. Feld/Voraussetzung) wird ein passendes Argument (3. Feld) ausgewählt. Der Voraussetzungscheck (2. Feld) dient der Validierung, ob die Voraussetzungen der Aufgabe und des Arguments wirklich übereinstimmen. Dieser Schritt wird innerhalb mathematischer Begründungsprozesse häufig lediglich implizit durchgeführt, ist aber später wichtig für das Erlernen des Beweisen. Durch das Scaffold wird die Überprüfung der Voraussetzung als notwendiger Schritt innerhalb des Prozesses deutlich. Anschließend kann die Schlussfolgerung (4. Feld) der Aufgabe eingetragen werden. Die Felder sind in der logischen Reihenfolge angeordnet, können aber nicht-linear ausgefüllt werden, wie beispielsweise der nachträgliche Voraussetzungs-Check.

Aufgabe 5 thematisiert die Lösung von Aufgabe 1 mit Hilfe der ausgefüllten Argumentationsschritte. Dabei wird die Flexibilität der Argumentationsschritte deutlich, indem die graphischen Designelemente bei mehrschrittigen Begründungen hintereinander angeordnet werden können. Auf der linken Seite sind allgemeingültige Impulse in Form von Sprechblasen dargestellt. Die Aufgabe und Impulse können im Anschluss bei den folgenden Aufgaben (zum Ausfüllen der graphischen Designelemente) als Hilfestellung verwendet werden.

In Speicherkiste A sind die Regeln im Anschluss dargestellt und auch die parallele Nutzung von mehreren Argumentationshilfen wird thematisiert. Ein Einsatz der Designelemente ist durch die beschriebene Flexibilität auch über die Unterrichtsreihe hinaus möglich.

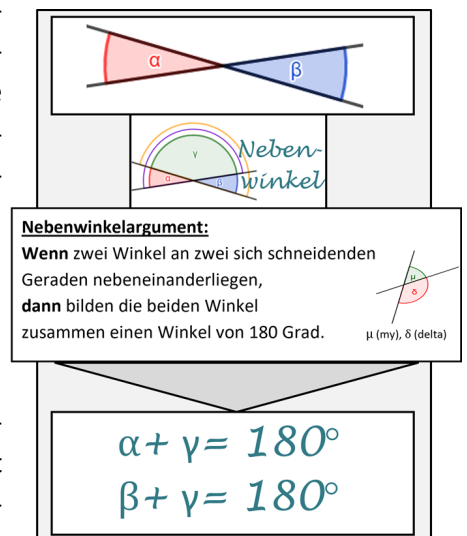


Abbildung 2: Ausgefülltes graphisches Designelement

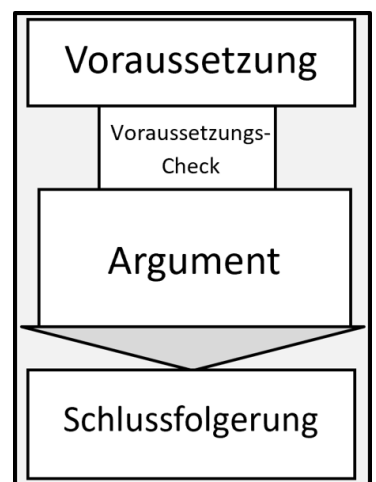


Abbildung 3: Erklärung der einzelnen Felder des graphischen Designelements

## Mathematischer Werkzeugkasten

Die mathematischen Sätze, die als Argumente genutzt werden können, werden jeweils im mathematischen Werkzeugkasten aufgeführt und nach und nach erweitert.

8 Mathematischer Werkzeugkasten 2

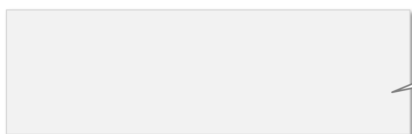
Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:



Nebenwinkelargument

Winkel-Rechen-Argument

Zusätzlich:



Argument aus Aufgabe 7

Abbildung 4: Exemplarischer mathematischer Werkzeugkasten

Die Reflexion der lokalen Ordnung der mathematischen Argumente soll im Anschluss an die Herleitung der Sätze in Aufgabe 20 angeregt werden.

## Speicherboxen

Speicherbox A thematisiert die Regeln, die beim mathematischen Begründen mithilfe der graphischen Designelemente gelten. Der Lückentext in Speicherbox B liefert Satzbausteine, die für eigene Argumentationen verwendet werden können. In Speicherbox C werden dann eigene Formulierungen verlangt. Dies verdeutlicht die linear fortschreitende Versprachlichung. Die sprachlichen Hilfestellungen werden im Laufe des Materials abgebaut und zunehmend eigene Formulierungen eingefordert.

### Speicherbox A: Nutzen von Argumentationsschritten und Argumenten

Mathematisches Begründen folgt möglichst immer diesen Regeln:

**Regel 1:** Argumente aus dem Werkzeugkasten  
Nur Argumente aus dem jeweiligen Werkzeugkasten können in den Argumentationsschritten genutzt werden.  
Deine Notizen dazu:

**Regel 2:** Ein Argumentationsschritt – ein Argument

- Jedes Argument wird in einem eigenen Argumentationsschritt genutzt.
- Das Argument kann in das mittlere große Feld gelegt werden oder auch reingeschrieben werden.

Deine Notizen dazu:

Nebenwinkelargument

Abbildung 5: Exemplarische Speicherbox

## Sprachliche Designelemente

Die Sprachmittel im Material sind verstehensorientiert aufgebaut. So sollen die logischen Strukturen beim Herleiten mathematischer Sätze zunächst sprachlich wahrnehmbar sein, indem explizierende Sprachmittel genutzt werden, bevor sie verdichtet werden. Für dieses sukzessive Vorgehen werden zunächst die logischen Elemente sprachlich expliziert („Was wird vorausgesetzt?“ (Voraussetzung) oder „Was folgt aus dem Satz für die Aufgabe?“ (Schlussfolgerung)).

Mathematische Sätze sollen von den Lernenden daher auch in der konditionalen Formulierung („Wenn..., dann...“) formuliert werden, bei denen Voraussetzung und Schlussfolgerung eindeutig voneinander getrennt sind. Hierbei können die gegebenen Sätze als sprachliches Scaffold („Gerüst“) genutzt werden. In den Aufgaben 7 c), 12 d) und 16 d) müssen die Sätze aus der jeweiligen Aufgabenstellung umformuliert werden, auch auf Grundlage des eigenen Beweises. Hier kann als Vorbild der Scheitelwinkelsatz aus Aufgabe 7 genutzt werden.

Die lineare Versprachlichung der Herleitung der mathematischen Sätze (Aufgabe 7, 12 und 16) geschieht gestützt durch die ausgefüllten Argumentationsschritte (Speicherbox B, Aufgabe 13 und 17). Hier werden insbesondere die logischen Beziehungen zwischen den logischen Elementen, also die logischen Zusammenhänge, zunächst mit Konjunktionen oder auch Adverbien („weil...“ (kausal), „daher“ (konsekutiv)) und Meta-Sprache („Was wir geschlussfolgert haben, können wir im nächsten Argumentationsschritt als Voraussetzung benutzen“ oder „Der ...-Satz besagt, dass...“) versprachlicht. Dies soll den Lernenden helfen, die logischen Strukturen wahrzunehmen und zu verstehen.

Zu diesem Zweck wird in Aufgabe 5 die lineare Versprachlichung mit ausgefüllten Argumentationsschritten einmal exemplarisch vorgestellt. Für die Aufgaben 13 und 17 (jeweils mündliche und schriftliche Versprachlichung der ausgefüllten Argumentationsschritte) kann neben dem Vorbild in Aufgabe 5 auch die Speicherbox B genutzt werden.

## Erläuterungen zu einzelnen Aufgaben

Im Folgenden werden exemplarisch die einzelnen Aufgaben zur konkreten Anwendung (Aufgabe 4 und Aufgabe 6) und zur Herleitung eines mathematischen Satzes (Aufgaben 7, 12 und 16) mit den graphischen Argumentationsschritten dargestellt. Die konkreten Aufgaben 10 und 15 funktionieren analog wie die Aufgabe 6. Die Aufgaben 19 und 20 dienen zur Reflexion und Sicherung der Unterrichtseinheit.

## A Nutzen von Argumentationsschritten und Argumenten

1-5 **Winkel bestimmen am Geradenkreuz – Begründung A (ca. 30 Minuten + 10 Minuten Reflexion)**

**Inhaltliches** Logische Elemente (Voraussetzung, Mathematischer Satz, Schlussfolgerung) wahrnehmen

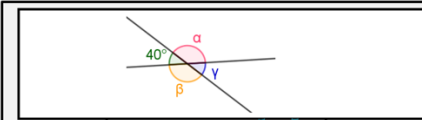
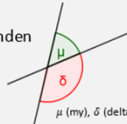

**Lernziel:** (auch mathematische Sätze und Material)

**Sprachliches** Sprachmittel für logische Elemente kennenlernen und Satz bewusst wahrnehmen

**Lernziel:**

**Umsetzung:** Finden des Lösungsweges: a) zunächst in PA, dann Ergebnissicherung b) in EA

### Impulse und Lösungen für die graphischen Argumentationsschritte in Aufgabe 4:

<p><b>Impuls - Voraussetzungscheck:</b> Was braucht man, um den Satz anwenden zu können? Schau Dir den Satz genau an!</p>	 <p>40°-Winkel und <math>\alpha</math> sind Nebenwinkel</p>
<p><b>Impuls - Argument:</b> Welchen Satz willst du anwenden?</p>	<p><b>Nebenwinkelargument:</b> Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.</p>  <p><math>\mu</math> (my), <math>\delta</math> (delta)</p>
<p><b>Impuls - Schlussfolgerung/Voraussetzung:</b> Was folgt aus dem mathematischen Satz? Was Du geschlussfolgert hast, kannst du im nächsten Schritt als Voraussetzung nutzen.</p>	<p><math>40^\circ + \alpha = 180^\circ</math></p>
<p><b>Impuls - Voraussetzungscheck:</b> Welche Bedingung muss erfüllt sein, um den Satz nutzen zu können?</p>	<p>40° und <math>\alpha</math> überschneiden sich nicht</p>
<p><b>Impuls - Argument:</b> Welcher Satz hilft dir bei deiner ersten Schlussfolgerung weiter?</p>	<p><b>Winkel-Rechen-Argument:</b> Wenn zwei Winkel <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe <math>\alpha + \beta</math>, d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.</p>  <p><math>\alpha</math> (alpha), <math>\beta</math> (beta)</p>
<p><b>Impuls - Schlussfolgerung:</b> Kannst du mit Hilfe deines Arguments die Aufgabe lösen?</p>	<p><math>\alpha = 140^\circ</math></p>

**6 (analog 10 Winkel bestimmen am Geradenkreuz – Begründung B (ca. 20 Minuten + 25 Minuten Reflexion) & 15)**

**Inhaltliches Ziel:** Selbst logische Elemente (Voraussetzung, mathematischen Satz, Schlussfolgerung) beim Anwenden auf einen weiteren konkreten Fall identifizieren

**Sprachliches Ziel:** Sprachmittel für logische Elemente nutzen und Argumentationsschritte versprachlichen

**Umsetzung:** Finden des Lösungsweges und der Argumentationsschritte: a)+b)+c) in PA (analog 10 und 15 (hier nur a) und b))

**Impulse und Lösungen für die graphischen Argumentationsschritte in Aufgabe 6b:**

**Impuls:**

Pro Anwendung ein Argumentationsschritt. (Hier kann man den Nebenwinkelsatz auch zweimal in einem Argumentationsschritt schreiben wie in der Speicherkiste A (siehe S. 6 im Material) (Noch nicht den Scheitelwinkelsatz nutzen lassen, da man den erst noch in Aufgabe 7 zeigen soll. Gegebenenfalls loben und auf später verweisen.)

**Impuls - Argument:**

Was habt ihr gegeben?  
Man darf auch Winkel mit einem Buchstaben bezeichnen und markieren.

**Impuls - Schlussfolgerung/Voraussetzung:**

Was folgt aus der Anwendung des mathematischen Satzes?  
Wie könnt ihr die Lösungen der ersten Schritte als Voraussetzung des nächsten Schrittes nutzen?

**Impuls - Voraussetzungscheck:**

Welche Bedingung muss erfüllt sein damit Argument und Voraussetzung zusammenpassen?

**Impuls - Argument:**

Welches Argument aus dem Werkzeugkasten könnte euch helfen?

**Impuls - Schlussfolgerung:**

Was folgt aus dem Argument für die Aufgabe?

**Nebenwinkelargument:**  
Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.

**Nebenwinkelargument:**  
Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.

$\beta + \gamma = 180^\circ$

$120^\circ + \gamma = 180^\circ$

$120^\circ + \gamma = 180^\circ$   
 $\beta + \gamma = 180^\circ$   
*120°,  $\beta$  und  $\gamma$  überschneiden sich nicht*

**Winkel-Rechen-Argument:**  
Wenn zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe  $\alpha + \beta$ , d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.

$\beta = 120^\circ$



## B Allgemeine Sätze begründen

### 7 Scheitelwinkelsatz begründen – Begründung C (ca. 15 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

**Inhaltliches** Herleitung eines mathematischen Satzes mit Unterstützung

**Ziel:**

**Sprachliches** Lineare Versprachlichung wahrnehmen und zugehörige Sprachmittel kennenlernen

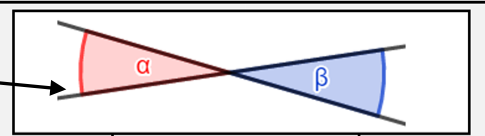
**Ziel:**

**Umsetzung:** Begründung und Dokumentation: a)+b)+c) in PA Lückentext bei Speicherkiste B: EA , Werkzeugkasten-erweiterung Aufgabe 8 in PA

#### Impulse und Lösungen für die graphischen Argumentationsschritte in Aufgabe 7:

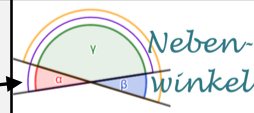
**Impuls - Voraussetzung:**

Man kann auch mit Buchstaben/Variablen rechnen.



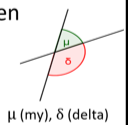
**Impuls - Voraussetzungscheck:**

Unterschied deutlich machen, dass hier nun allgemein vorgegangen wird. Die Sprechblasen von Emily und Tim können als Gesprächsanlass verwendet werden.



**Nebenwinkelargument:**

Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.



**Impuls - Argument:**

Welches Argument können wir hier benutzen?

**Impuls - Schlussfolgerung/Voraussetzung:**

Was folgt aus der Nutzung des Arguments?  
Was können wir aus der Anwendung des Arguments schlussfolgern?

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

**Impuls - Voraussetzungscheck:**

Wieso können wir unsere Schlussfolgerung nutzen?

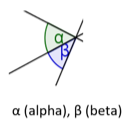
$\alpha, \beta, \gamma, 180^\circ$   
überschneiden sich nicht

**Impuls - Argument:**

Welches Argument baut auf unserer Schlussfolgerung auf?

**Winkel-Rechen-Argument:**

Wenn zwei Winkel  $\beta$  und  $\alpha$  sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe  $\beta + \alpha$ , d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.



**Impuls - Schlussfolgerung:**

Was bedeutet das für unsere Aufgabe?  
Welche allgemeingültige Aussage können wir nun treffen?


$$\alpha = \beta$$

oder auch mit zwei parallelen Schritten am Anfang (Nebenwinkel-paare einzeln)



Das Erklärvideo kann dabei unterstützen, vertiefend zu lernen, wie man mathematische Begründungen herstellt und linear versprachlicht.

In der **Speicherbox B** ist die Herleitung mit explizierenden Sprachmitteln. Insbesondere auch Konjunktionen und eine Metasprache, die die logischen Strukturen sprachlich deutlich macht. Die Lernenden sollen hier den mathematischen Inhalt an die richtigen Stellen platzieren.



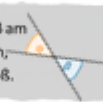
**Speicherbox B: Sprache für Argumente und Begründungen**

Füllt in Einzelarbeit die Sprechblasen und den Lückentext in der Speicherbox aus.


  

Begründet folgenden allgemeinen mathematischen Satz, der Scheitelwinkelsatz genannt wird:


Wenn sich zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  am Geradenkreuz gegenüberliegen, dann sind die Winkel gleich groß.




**Voraussetzung**



**Benötigte Voraussetzung**



**Nebenwinkelargument:**  
Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden sie einen Winkel von 180 Grad.




**Argument**

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$\alpha, \beta, \gamma, 180^\circ$   
*überschneiden sich nicht*

**Winkel-Rechen-Argument:**  
Wenn zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe  $\alpha + \beta$ , d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.



**Schlussfolgerung**

$$\alpha = \beta$$

Es soll gezeigt werden, dass  $\alpha$  und  $\beta$  gleich groß sind. \_\_\_\_\_

Wir haben *die beiden gegenüberliegenden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  am Geradenkreuz* gegeben.

Damit haben wir hier *Nebenwinkel* \_\_\_\_\_ vorliegen.

Daher können wir *das Nebenwinkelargument* \_\_\_\_\_ anwenden.

Das *Nebenwinkel* \_\_\_\_\_-Argument besagt, dass „Wenn zwei Winkel an sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad \_\_\_\_\_“.

Daraus folgt, dass  *$\alpha + \gamma = 180^\circ$  und  $\beta + \gamma = 180^\circ$*  \_\_\_\_\_.

Was wir geschlussfolgert haben, können wir im nächsten Argumentationsschritt als Voraussetzung ansehen:

Weil damit *zwei sich nicht überschneidende Winkel* vorliegen, können wir das \_\_\_\_\_ *Winkel-Rechen-Argument* anwenden.

Nach dem *Winkel-Rechen*-Argument gilt, dass *man mit den Winkelgrößen rechnen kann* \_\_\_\_\_.

Also gilt, dass  *$\alpha = \beta$*  \_\_\_\_\_.

Damit haben wir gezeigt, dass *Scheitelwinkel gleich groß sind* \_\_\_\_\_.

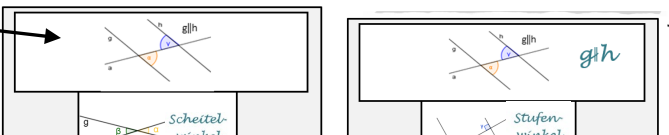
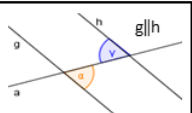
## C Selbst hergeleitetes Argument nutzen

### 12-14 Wechselwinkelsatz begründen – Begründung E (ca. 45 Minuten)

**Inhaltliches** Herleitung eines mathematischen Satzes verstehen (Aufgabe 10 analog, den Gleichheitssatz benötigt man jedoch nicht, da der konkrete Wert genutzt werden kann)

**Sprachliches** Eigene lineare Versprachlichung  
**Ziel:**

**Umsetzung:** Formulierung des mathematischen Satzes und der Argumentationsschritte: a) +b) +c) + d) in PA; dann Versprachlichung mit unterschiedlichen Phasen: Aufgabe 13 a), c) und e) in PA, b) und d) in EA, zuletzt Werkzeugkastenerweiterung Aufgabe 14 in PA

<p><b>Impuls - Voraussetzung:</b> Was ist mit diagonal gegenüberliegend und parallelen Geraden gemeint?</p>	
<p><b>Impuls - Voraussetzungscheck:</b> Braucht man bei den beiden ersten Schritten die gleichen Voraussetzungen?</p>	<p><b>Scheitelsatz:</b> Wenn zwei Winkel sich an einem Geradenkreuz gegenüberliegen (Scheitelwinkel), dann sind sie gleich groß.</p> <p><b>Stufenwinkelsatz:</b> Wenn zwei parallele Geraden s und t von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel <math>\mu</math> und <math>\delta</math> gleich groß.</p>
<p><b>Impuls - Argument:</b> Welche Argumente können wir nutzen, weil ihre Voraussetzung in dieser Aufgabe erfüllt ist?</p>	<p><math>\alpha = \beta</math></p> <p><math>\beta = \gamma</math></p>
<p><b>Impuls - Schlussfolgerung/Voraussetzung:</b> Warum müssen die Geraden parallel sein? Zu welcher Variable aus der Aufgabe können wir mithilfe des Arguments eine Schlussfolgerung treffen?</p>	<p><math>\alpha = \beta</math></p> <p><math>\beta = \gamma</math></p> <p>Winkelgrößen mit den Gleichungen</p>
<p><b>Impuls - Voraussetzungscheck:</b> Wieso können wir das Argument nutzen?</p>	<p><b>Gleichheitsargument:</b> Wenn für die Winkelgrößen <math>\delta</math>, <math>\mu</math> und <math>\pi</math> <math>\delta = \mu</math> und <math>\mu = \pi</math> gilt, dann ist auch <math>\delta = \pi</math>.</p>
<p><b>Impuls - Argument:</b> Müssen die Variablen in dem Argument die gleichen Bezeichnungen haben, wie die Variablen in der Aufgabe? Welches Argument kann uns hier weiterhelfen?</p>	<p><math>\alpha = \gamma</math></p>
<p><b>Impuls - Schlussfolgerung:</b> Welche Eigenschaften muss man bei der Verschriftlichung explizieren?</p>	<p><b>Wechselwinkelsatz:</b> Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten werden, dann sind die Wechselwinkel gleich groß.</p> 

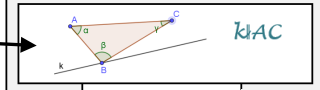
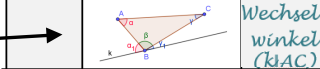
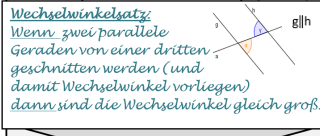
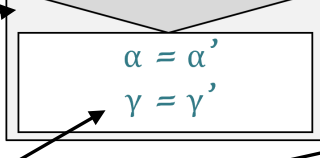
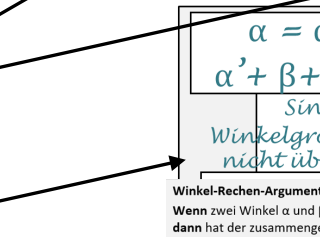
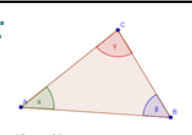
## D Selbst hergeleitete Argumente nutzen

16 Innenwinkelsummensatz im Dreieck begründen – Begründung G (ca. 12 Minuten + 20 Minuten Reflexion)

**Inhaltliches Ziel:** Weiteren Satz herleiten mit selbst hergeleiteten Sätzen (Aufgabe 15 als Vorbereitung)

**Sprachliches Ziel:** Selbstständige Verschriftlichung

**Umsetzung:** Formulierung des mathematischen Satzes und der Argumentation: a) +b) +c) + d) +e) in PA; dann Versprachlichung mit unterschiedlichen Phasen: Aufgabe 17 a) und c) in EA, b) und d) in PA, zuletzt Werkzeugkastenerweiterung Aufgabe 18 in PA

<p><b>Impuls - Voraussetzung:</b> Es kann eine Hilfslinie benutzt werden.</p>	 <p><math>k \parallel AC</math></p>
<p><b>Impuls - Voraussetzungscheck:</b> Statt des Gestreckten-Winkel-Satzes kann auch der Nebenwinkelsatz genutzt werden. Zeige wo genau man am Dreieck erkennen kann, dass die Voraussetzungen des Arguments erfüllt ist</p>	 <p>Wechselwinkel (kAC)</p> <p>Gestreckter Winkel</p> <p><b>Wechselwinkelsatz:</b> Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten werden (und damit Wechselwinkel vorliegen) dann sind die Wechselwinkel gleich groß.</p> <p><b>Gestreckter-Winkel-Argument:</b> Wenn ein Winkel an einer Geraden vorliegt, dann ist er 180 Grad groß.</p>
<p><b>Impuls - Argument:</b> Kannst du innerhalb des Bildes weitere Winkel eintragen, um ein Argument nutzen zu können?</p>	 <p><math>\alpha = \alpha'</math> <math>\gamma = \gamma'</math></p> <p><math>\alpha' + \beta + \gamma' = 180^\circ</math></p>
<p><b>Impuls - Schlussfolgerung/Voraussetzung:</b> Welche Schlussfolgerung können wir nun für die einzelnen Winkel aufstellen?</p>	 <p><math>\alpha = \alpha'; \gamma = \gamma'</math> <math>\alpha' + \beta + \gamma' = 180^\circ</math></p> <p>Sind alle Winkelgrößen, die sich nicht überschneiden</p> <p><b>Winkel-Rechen-Argument:</b> Wenn zwei Winkel <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe <math>\alpha + \beta</math>, d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.</p>
<p><b>Impuls - Voraussetzungscheck:</b> Warum kann ich das Argument anwenden? Welche Bedingung muss bei den Winkeln erfüllt sein, damit ich das Argument nutzen kann?</p>	 <p><math>\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ</math></p>
<p><b>Impuls - Argument:</b> Gilt das Argument auch für mehr als zwei Winkel?</p> <p><b>Impuls - Schlussfolgerung:</b> Warum gilt das jetzt für alle Dreiecke? Was ist, wenn das Dreieck anders aussieht?</p>	<p><b>Winkelinnensummensatz:</b> Wenn ein Dreieck vorliegt, dann haben die Innenwinkel zusammen eine Größe von 180 Grad.</p> 

**19 Aufbau mathematischer Argumente (ca. 5-10 min)**

**Inhaltliches Ziel:** Voraussetzung und Schlussfolgerung identifizieren lernen

**Ziel:**

**Sprachliches Ziel:** Reflexion möglicher sprachlicher Formulierungen

**Ziel:**

**Umsetzung:** Erst Erklärung in EA, dann Rückmeldungen in PA

**Impuls:**

Schaut euch noch mal die ausgefüllten Argumentationsschritte aus den Aufgaben 7, 12 und 16 an.

**Impuls:**

Warum ist **B.** ein mathematischer Satz, obwohl er nicht mit „Wenn... ,dann...“ formuliert wurde?

19 Aufbau mathematischer Argumente

**A.** Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

**B.** Hat ein Dreieck drei 60 Grad-Winkel, so ist es gleichseitig.



a) Erkläre alleine die beiden Teile der mathematischen Argumente.

- Woran erkennst du die Voraussetzung im Argument?
- Woran erkennst du die Schlussfolgerung im Argument?

**A.** „Wenn“ markiert die Voraussetzung  
„dann“ markiert die Schlussfolgerung

**B.** „hat ein“ leitet die Voraussetzung hier ein  
„so ist“ markiert hier die Schlussfolgerung

**Impuls:**

Schaut euch noch mal die ausgefüllten Argumentationsschritte aus den Aufgaben 7, 12 und 16 an.

